วารสารพัฒนบริหารศาสตร์ ปีที่ 26 ฉบับที่ 4 ตุลาคม 2529

แนวความคิดในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากรจาก k ประชากร*

จิราวัลย์ มิตรทองแท้**

บทนำ

ในชีวิตประจำวันคนเรามักจะเผชิญกับการตัดสินใจเลือกอยู่เสมอ บางครั้งเป็นการเลือกที่เกี่ยวข้องกับตัวของเราเองเช่น การเลือกซื้อรองเท้า การเลือกเรียนวิชาเอก การเลือกคู่ครอง เป็นต้น ความยากง่ายของการตัดสินใจขึ้นอยู่กับผลจากการเลือกว่ามีผลเสียมากน้อยเพียงไร เพราะแต่ละคนจะมองปัญหาของผลการตัดสินใจเลือกแตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับตัวบุคคล ประสบการณ์ ความนิยม ความรู้ ภูมิหลัง ข้อจำกัดและอื่น ๆ อีกหลายอย่างของผู้ตัดสินใจเลือก การตัดสินใจเลือกในสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคนส่วนใหญ่ซึ่งจะมีผลมากต่อสังคม เช่น การตัดสินใจเลือกพันธุ์ข้าวที่จะให้ผลผลิตสูงสุดในจังหวัดหนึ่ง ๆ เพื่อแนะนำให้เกษตรกรในจังหวัดนั้น ๆ ปลูกเพื่อเพิ่มผลผลิต หรือการตัดสินใจเลือกยาแก้ปวดที่ให้ผลการระงับปวดดีที่สุดสำหรับสตรีที่อยู่ในระหว่างการมีครรภ์ของสถาบันวิจัยทางการแพทย์เป็นต้น การตัดสินใจเลือกในเรื่องดังกล่าวนี้หากจะอาศัยสิ่งต่าง ๆ

---

* ผู้เขียนขอขอบคุณ รศ. ดร. วิชิต หล่อจีระชุณห์กุล และ ผศ. ดร. บริบูรณ์ ศิริมูล อาจารย์คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ ที่ได้กรุณาอ่านบทความนี้และให้ข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงบทความให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

ที่กล่าวมาแล้วข้างต้นอาจจะไม่เพียงพอ แต่จะต้องอาศัยข้อมูลต่าง ๆ ที่ได้จากการทดลอง รวมทั้งการตรึกตรองอย่างรอบคอบ เข้ามาช่วยในการตัดสินใจด้วย การตัดสินใจเลือกอาจจะเลือกเพียง 1 กลุ่ม หรือมากกว่า 1 กลุ่มจาก k กลุ่มที่กำลังพิจารณาอยู่ก็ได้ การตัดสินใจเลือกที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลเชิงปริมาณซึ่งได้มาจากการทดลองและอาศัยหลักเกณฑ์ทางสถิติเพื่อช่วยในการตัดสินใจเลือก เรียกว่า กระบวนการเลือกทางสถิติ (Statistical Selection Procedure) นอกจากการตัดสินใจเลือกแล้วยังมีการจัดลำดับกลุ่มเรียงจากดีมากไปหาดีน้อยโดยอาศัยข้อมูลเชิงปริมาณที่ได้จากการทดลอง และกฎเกณฑ์ทางสถิติเข้าช่วยซึ่งเรียกว่า กระบวนการจัดลำดับทางสถิติ (Statistical Ranking Procedure) ในภาษาทางสถิติกลุ่มที่กล่าวถึงนี้หมายถึงประชากรนั่นเอง ปัญหาในการตัดสินใจเลือกในทางด้านสถิติก็คือ การหาเกณฑ์ที่เหมาะสมในการเลือกเพื่อให้ได้ประชากรที่ดีที่สุด หรือกลุ่มของประชากรที่ดีที่สุดซึ่งอาจจะมีมากกว่า 1 ประชากร คำว่าดีที่สุดในที่นี้จะต้องนิยามอย่างชัดเจนว่า ลักษณะหรือคุณสมบัติอย่างไรที่ถือว่าดีที่สุด และพยายามสร้างเกณฑ์ในการเลือกขึ้นมาให้สอดคล้องกับลักษณะและคุณสมบัติที่ต้องการ เมื่อมีเกณฑ์ในการเลือกแล้ว การตัดสินใจเลือกประชากรที่ดีที่สุดจะต้องอาศัยข้อมูลที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างจากทุกประชากร โดยนำข้อมูลที่ได้นั้นมาพิจารณาโดยอาศัยเกณฑ์ในการเลือกที่วางไว้ ปัญหาที่ตามมาก็คือจะต้องสุ่มตัวอย่างจากทุกประชากรเป็นจำนวนเท่าใด เพื่อที่จะชี้ให้เห็นถึงความแตกต่างของประชากรใน k ประชากรนั้น และสามารถที่จะชี้บอกถึงประชากรที่ดีที่สุดได้ ในวิชาสถิติที่ใช้กันอยู่ทั่ว ๆ ไป (Classical Statistics) ได้มีการเปรียบเทียบ k ประชากร โดยอาศัยข้อมูลจากทุกประชากรเช่นกัน เพียงแต่ไม่ได้เสนอการเลือกประชากรที่ดีที่สุดไว้อย่างชัดเจนเท่านั้น การทดสอบสมมุติฐานที่เกี่ยวข้องกับ k ประชากรนั้น ก็มีการทดสอบความเป็นเอกพันธุ์ (Test of Homogeneity) ของประชากรว่าทุกประชากรมีพารามิเตอร์ที่สนใจเท่ากันหรือไม่ โดยจะตั้ง Null Hypothesis ไว้ว่า

$$H_0 \ : \ \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$$

เมื่อ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ คือลักษณะหรือคุณสมบัติที่สนใจจะทำการศึกษา ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของประชากรทั้ง k ประชากรนั้นเอง และมี Alternative Hypothesis ว่าพารามิเตอร์ของ

ประชากรอย่างน้อย 1 คู่ มีค่าแตกต่างกัน วิธีการทดสอบจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ที่จะทำการศึกษา เช่น ถ้าพารามิเตอร์ที่เราสนใจคือ ค่าเฉลี่ย (Mean) ซึ่งมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ และมีความบ่ายเบนมาตรฐานเท่ากันและทราบค่า การทดสอบจะใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวน หรือที่เรียกว่า Fisher's F—test ในกรณีที่ต้องการจะทดสอบพารามิเตอร์ตัวอื่นของประชากรภายใต้สมมุติฐานที่แตกต่างกัน วิธีการทดสอบที่ใช้ก็จะแตกต่างกันออกไป การทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของพารามิเตอร์ของประชากรนี้ ถ้าผลการทดสอบปรากฏว่าเราปฏิเสธสมมุติฐานที่เป็น Null Hypothesis ผู้ทำการศึกษามักจะไม่หยุดอยู่เพียงเท่านี้ แต่จะทำการทดสอบแบบ Multiple Comparisons วิธีใดวิธีหนึ่ง เช่น Tukey's Procedure, Duncan's Multiple Range test, Scheffe's Method หรือ Newman-Keuls test เป็นต้น เพื่อศึกษาถึงความแตกต่างของแต่ละประชากร ผลจากการทดสอบแบบ Multiple Comparisons อาจจะชี้ให้เห็นถึงประชากรที่ดีที่สุดได้ แต่ถ้าจะใช้วิธีที่กล่าวมานี้ในการเลือกประชากรที่ดีที่สุดย่อมไม่เหมาะสมนัก เพราะต้องผ่านการคำนวนหลายขั้น-ตอน จึงได้มีนักสถิติบางท่านเสนอแนวความคิดในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด โดยวิธีการทางสถิติขึ้น เพื่อจุดประสงค์ในการเลือกประชากรที่ดีที่สุดโดยเฉพาะ

Wald เป็นนักสถิติคนแรกที่ได้พัฒนาวิธีการเลือกและจัดลำดับของประชากรโดยอาศัยเทคนิคทาง Sequential ขึ้นในปี 1940 และในปี 1946 Girshick ได้เสนอวิธีการจัดลำดับของ 2 ประชากรโดยอาศัยการวิเคราะห์ทาง Sequential นอกจากนี้ยังได้นำเสนอการเลือกและจัดลำดับประชากร โดยใช้ Sequential และ Non—Sequential ด้วย วิธีการที่นำเสนอในระยะเริ่มแรกไม่ค่อยจะสมบูรณ์นัก และแนวความคิดก็แตกต่างกันออกไป จนถึงปลายทศวรรษ 1940 และต้นทศวรรษ 1950 ได้มีการเสนอตัวแบบการทดสอบสมมุติฐานที่เรียกว่า Slippage (การทดสอบสมมุติฐานโดยมี Null Hypothesis ว่าพารามิเตอร์ทุกตัวของประชากรมีค่าเท่ากัน และมี Alternative Hypothesis ว่าพารามิเตอร์ของประชากรใดประชากรหนึ่งเคลื่อนเอียงไปทางขวาหรือซ้าย เมื่อพารามิเตอร์ของประชากรอื่น ๆ มีค่าเท่ากันหมด นั่นคือ

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$$

$$H_a : \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{i-1} = \theta_{i+1} = \cdots = \theta_k = \theta_i + \Delta$$

เมื่อ $\Delta > o$ หรือ $\Delta < o$)

นับว่าเป็นจุดเริ่มต้นของวิทยาการทางด้านนี้อย่างจริงจัง จนถึงปี 1954 Bechhofer, Dunnett และ Sobel ได้เสนอบทความซึ่งให้พื้นฐานของแนวความคิดเกี่ยวกับการเลือกและจัดลำดับประชากรที่สำคัญนับได้ว่าเป็นพื้นฐานหลักในการพัฒนาวิธีการเลือกและจัดลำดับประชากรของนักสถิติในรุ่นต่อ ๆ มา นอกจากนี้นักสถิติยังได้อาศัยหลักการและแนวความคิดดังกล่าวนี้ในการพัฒนาการเลือกเซ็ทย่อยที่ดีที่สุดขึ้น สำหรับทางด้านการประยุกต์ใช้ ได้นำเอาวิธีการดังกล่าวไปประยุกต์ในหลายสาขา เช่น Becker (1961) ได้นำวิธีการเลือกประชากรที่ดีที่สุดไปใช้ในการคัดเลือกพันธุ์ไก่ที่ให้ไข่ดกที่สุด Dalal และ Srinivasan (1975) ได้นำไปใช้ในการเลือกสื่อในการโฆษณาสินค้าบางชนิด เพื่อตัดสินใจที่จะเลือกสื่อในการโฆษณาที่ทำให้อัตราในการซื้อสินค้าชนิดนั้นสูงที่สุด นอกจากนี้ยังมีผู้นำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ เช่น การแพทย์ การเกษตร และการอุตสาหกรรม เป็นต้น แต่วิธีการที่กล่าวมานี้จะใช้ได้เฉพาะข้อมูลเชิงปริมาณหรือข้อมูลที่สามารถแปลงรูปเป็นข้อมูลเชิงปริมาณได้เท่านั้น

กระบวนการจัดลำดับและการเลือกประชากรในทางด้านสถิตินั้นมีจุดมุ่งหมายหลายประการ แนวคิดและวิธีการของกระบวนการจัดลำดับและการเลือกประชากรนั้นจะแตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายที่กำลังพิจารณา เช่น ถ้ากำหนด k ประชากรให้อาจจะมีจุดมุ่งหมายในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร หรืออาจต้องการเลือก t ประชากรที่ดีที่สุด เมื่อ $2 \leq t < k$ หรืออาจต้องการเลือก r ประชากร จาก t ประชากรที่ดีที่สุด โดยที่ r เป็นจำนวนสุ่มหรือจำนวนคงที่ก็ได้ หรืออาจมีจุดมุ่งหมายในการจัดลำดับ k ประชากร จากที่ดีที่สุดไปหาดีน้อยที่สุดหรือในทางกลับกัน หรืออาจต้องการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร จาก k ประชากร โดยมีประชากรมาตรฐานที่กำหนดให้เป็นประชากรเปรียบเทียบ หรืออาจต้องการเลือกเซ็ทย่อยของประชากรที่ดีสุดจากกลุ่ม

ประชากรที่ดีกว่าประชากรมาตรฐาน เป็นต้น ในบทความนี้จะกล่าวถึงเฉพาะแนวคิดและหลักการ ขั้นตอนในการเลือก และตัวอย่าง สำหรับการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร จาก k ประชากรที่กำหนดให้

แนวคิดและหลักการในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด

กำหนดประชากรให้ k ประชากร แต่ละประชากรมีฟังก์ชั่นการกระจาย (Distribution Function), $F(x;\ \theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ซึ่ง $F(x;\ \theta_i)$ นี้อาจจะเป็นฟังก์ชั่นการกระจายที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ θ_i ความบ่ายเบนมาตรฐานเท่ากันและทราบค่า หรืออาจเป็นฟังก์ชั่นการกระจายแบบทวินามหรือปัวซองที่มีพารามิเตอร์ของประชากรที่ i เท่ากับ θ_i เป็นต้น วัตถุประสงค์ในการเลือกก็คือต้องการเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์สูงที่สุด ดังนั้นถ้า

$\theta_{[1]} \leq \theta_{[2]} \leq \ldots \leq \theta_{[k]}$ เป็นค่าของ θ ที่เรียงลำดับจากน้อยไปหามากแล้ว เราจะถือว่าประชากรที่มีค่าของพารามิเตอร์เท่ากับ $\theta_{[k]}$ เป็นประชากรที่ดีที่สุด เช่น ถ้าเราพิจารณา 8 ประชากร และประชากรที่ 5 มีค่าพารามิเตอร์ θ_5 เท่ากับ $\theta_{[8]}$ ก็แสดงว่าประชากรที่ 5 เป็นประชากรที่ดีที่สุด ในกรณีที่มีประชากรมีค่าของ θ เท่ากับ $\theta_{[k]}$ หลายประชากรเราจะทำการเลือก 1 ประชากร จากกลุ่มของประชากรนี้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากเราไม่ทราบค่าที่แท้จริงของ θ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ และไม่ทราบความสัมพันธ์ระหว่าง θ_i กับ $\theta_{[i]}$ ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องสุ่มตัวอย่างและประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ_i โดยใช้ตัวสถิติ T_i; $i = 1, 2, \ldots, k$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตจากตัวอย่างและเป็นตัวประมาณที่ดีของ θ_i แล้วเลือกประชากรที่สมนัยกับประชากรที่ให้ค่าสถิติเท่ากับ $T_{[k]}$ เป็นประชากรที่ดีที่สุด เมื่อ $T_{[k]}$ คือค่าสถิติที่มากที่สุดจากการจัดเรียงค่า T_i จากน้อยไปมาก แต่เนื่องจากประชากรที่มีค่า θ เท่ากับ $\theta_{[k]}$ ไม่จำเป็นจะต้องให้ค่าของ T_i สูงสุดเสมอไป คำถามที่

ตามมาก็คือ เราจะต้องสุ่มตัวอย่างจำนวนเท่าใดจึงจะสามารถชี้ให้เห็นถึงประชากรที่ดีที่สุด และถูกต้องตรงกับความเป็นจริงได้ โดยทั่วไปมักจะกำหนดให้ขนาดของตัวอย่างที่มาจากแต่ละประชากรเท่ากัน แต่บางกรณีก็ไม่อาจกำหนดขนาดของตัวอย่างให้เท่ากันหมดได้ เพราะอาจไม่มีตัวอย่างเท่าที่ต้องการหรือหาตัวอย่างได้ยากหรืออาจเป็นเพราะข้อจำกัดอื่น ๆ ในกรณีนี้ต้องพิจารณาขนาดของตัวอย่างให้เหมาะสมตามความเป็นไปได้ แต่อย่างไรก็ตาม เพื่อความง่ายสะดวกและมีประสิทธิภาพ จำนวนตัวอย่างที่ใช้ควรเท่ากันในทุกประชากร ในบทความนี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่มีตัวอย่างจากทุกประชากรเท่ากัน

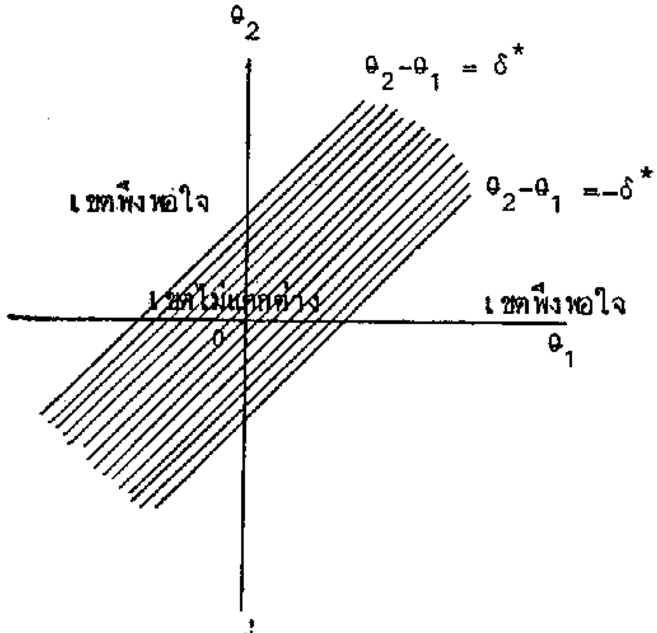
การตัดสินใจเลือกประชากรที่ให้ค่าสถิติของตัวอย่างเท่ากับ $T_{[k]}$ เป็นประชากรที่ดีที่สุด เมื่อประชากรนั้นมีค่า θ ไม่เท่ากับ $\theta_{[k]}$ จะเกิดความผิดพลาดขึ้นซึ่งเป็นความผิดพลาดของการเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์ $\theta_{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ เป็นประชากรที่ดีที่สุด ข้อที่น่าสังเกตในการเลือกประชากรก็คือ เราไม่ต้องการประมาณค่าของ $\theta_{[k]}$ หรือมีการตัดสินใจเกี่ยวกับค่าของ $\theta_{[k]}$ แต่เราจะทำการเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์เท่ากับ $\theta_{[k]}$ ดังนั้นความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจึงมีเพียงการเลือกประชากรที่ดีที่สุดผิดไปเท่านั้น นั่นคือเราให้ความสนใจกับความผิดพลาดชนิดที่ 1 (Type I error) หรือเรียกว่าระดับนัยสำคัญของการทดสอบซึ่งแทนด้วย α น้อยมาก แต่จะให้ความสำคัญกับความผิดพลาดชนิดที่ 2 (Type II error) ทั้งนี้ก็เพราะว่าเราเลือกประชากรและอ้างว่าประชากรนั้นดีที่สุด คือมีค่า $\theta = \theta_{[k]}$ ในเมื่อจริง ๆ แล้ว θ มีค่าน้อยกว่า $\theta_{[k]}$ ความผิดพลาดชนิดที่ 2 หรือ β นี้เป็นความน่าจะเป็นที่จะเลือกประชากรผิดนั่นเอง และ $1-\beta$ หรือกำลังของการทดสอบก็คือความน่าจะเป็นที่จะเลือกประชากรที่มีค่าพารามิเตอร์ θ เท่ากับ $\theta_{[k]}$ และความน่าจะเป็นนี้จะชี้ให้เห็นถึงคุณสมบัติของการจัดลำดับและการเลือกสำหรับตัวแบบเมื่อกำหนดขนาดของตัวอย่างให้ ความน่าจะเป็นที่กล่าวถึงนี้ขึ้นอยู่กับค่าจริงของเวคเตอร์ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ ดังนั้นเราต้องวิเคราะห์เซ็ทของค่า θ ทั้งหมดในพารามิเตอร์สเปส

โดยอาศัยความแตกต่างระหว่างค่าของ $\theta_{[k]}$ กับ $\theta_{[1]}, \theta_{[2]}, \ldots, \theta_{[k-1]}$ ซึ่งผลต่างระหว่าง $\theta_{[k]}$ กับ $\theta_{[i]}$; $i = 1, 2, \ldots, k-1$ จะแบ่งพารามิเตอร์สเปสออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 เรียกว่า เขตพึงพอใจ (Preference Zone) เป็นเขตที่พารามิเตอร์ $\theta_{[k]}$ แตกต่างจากพารามิเตอร์ $\theta_{[i]}, i = 1, 2, \ldots, k-1$ มาก

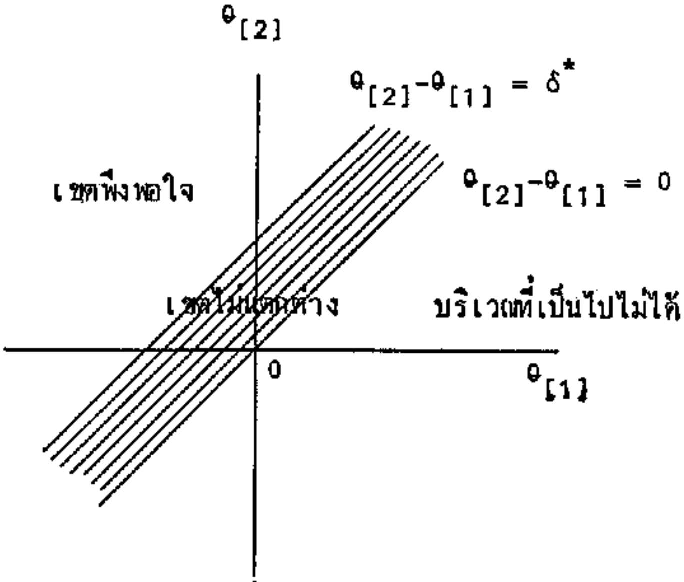
ส่วนที่ 2 เรียกว่า เขตไม่แตกต่าง (Indifference Zone) เป็นเขตที่พารามิเตอร์ $\theta_{[k]}$ แตกต่างจากพารามิเตอร์ $\theta_{[i]}, i = 1, 2, \ldots, k-1$ น้อย

พิจารณาการแบ่งพารามิเตอร์สเปสเมื่อกำหนดให้ $k = 2$ สมมุติว่าพารามิเตอร์ที่สนใจคือ θ_1 และ θ_2 ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริงใด ๆ ความแตกต่างระหว่าง θ_1 และ θ_2 มีค่าเท่ากับ δ^* ซึ่งกำหนดขึ้นโดยผู้ทดลอง เขตไม่แตกต่างคือเขตที่แรเงาในรูปที่ 1 ซึ่งเขตนี้อาจแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\delta^* < \theta_2 - \theta_1 < \delta^*$ และส่วนที่เหลือจะเป็นเขตพึงพอใจ



รูปที่ 1

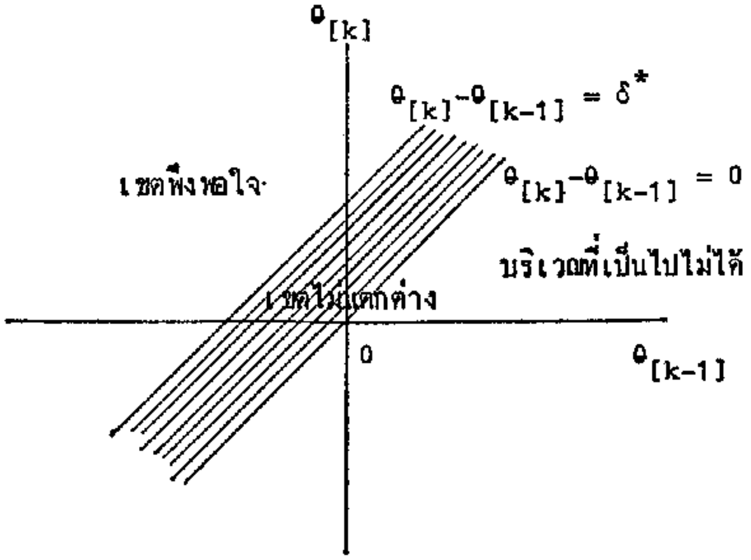
โดยทั่วไปแล้วรูปร่างของเขตไม่แตกต่างจะมีลักษณะที่แตกต่างกันออกไป แล้วแต่ฟังก์ชั่นของ θ_1 และ θ_2 ถ้าพิจารณาพารามิเตอร์สเปสเมื่อมีการจัดลำดับค่าของพารามิเตอร์ θ_1 และ θ_2 โดยที่ $\theta_{[1]} \le \theta_{[2]}$ แล้ว พารามิเตอร์สเปสในรูปที่ 1 จะถูกตัดเหลือเพียงครึ่งเดียวเท่านั้น จุดต่ำสุดของพารามิเตอร์สเปสคือ $\theta_{[1]} = \theta_{[2]}$ เขตไม่แตกต่าง คือเขตที่แรเงาดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งเขตนี้จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $0 < \theta_{[2]} - \theta_{[1]} < \delta^*$ พื้นที่ใต้เส้น $\theta_{[2]} - \theta_{[1]} = 0$ จะเป็นบริเวณที่เป็นไปไม่ได้ พื้นที่เหนือเส้น $\theta_{[2]} - \theta_{[1]} = \delta^*$ จะเป็นเขตพึงพอใจ



รูปที่ 2

ถ้าพิจารณา k ประชากรที่กำหนดให้ พารามิเตอร์สเปสที่กำลังพิจารณาจะเป็น k มิติ อย่างไรก็ตามในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร เราให้ความสนใจค่าของ $\theta_{[1]}, \theta_{[2]}, \ldots, \theta_{[k-2]}$ น้อยมาก เพราะเราทราบว่า ความแตกต่างระหว่าง $\theta_{[k]}$ กับ $\theta_{[k-1]}$ จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ ความแตกต่างระหว่าง $\theta_{[k]}$ กับ $\theta_{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, k-2$ เสมอ ถ้าให้นิยาม เขตไม่แตกต่างเป็น $\theta_{[k]} - \theta_{[k-1]} < \delta^*$ เมื่อ δ^*

เป็นค่าที่กำหนดให้ การกำหนดเขตไม่แตกต่าง และเขตพึงพอใจใน k ประชากร นี้จะเหมือนกับในกรณีของ 2 ประชากร แต่ในกรณีนี้ตัวแบ่งเขตจะเป็น $\theta_{[k]} - \theta_{[k-1]} < \delta^*$ ดังแสดงในรูปที่ 3

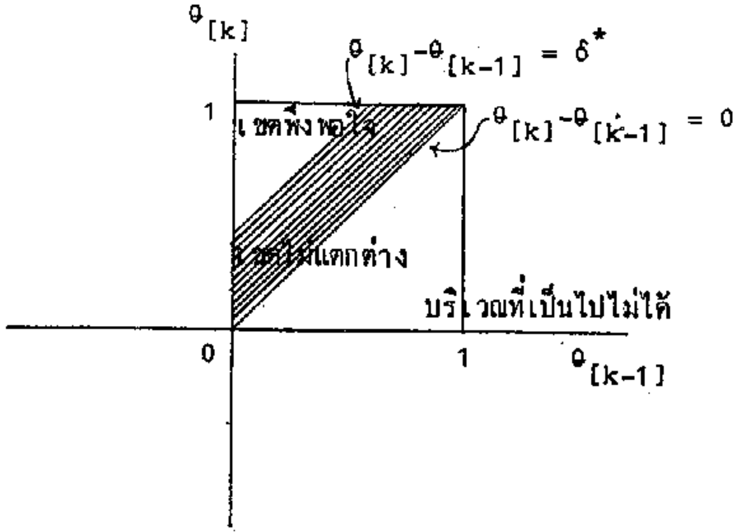


รูปที่ 3

โดยทั่วไปแล้ว ค่า δ^* ที่ใช้ในการแยกเขตพึงพอใจและเขตไม่แตกต่างนี้จะเรียกว่ามาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ (Distance measure or Distance function) ซึ่งผู้ทำการทดลองเป็นผู้กำหนดขึ้น อาจจะอยู่ในรูปของเส้นตรง หรืออัตราส่วน หรือรูปอื่น ๆ ก็ได้

การกำหนดมาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ที่มีรูปแบบเดียวกันในการเลือกประชากรที่มีฟังก์ชันการกระจายต่างกัน ลักษณะของพารามิเตอร์สเปสจะแตกต่างกันออกไป ทั้งนี้เพราะพิสัยของค่า θ ที่ต่างกัน เช่น ถ้ากำหนด มาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ $\theta_{[k]} - \theta_{[k-1]} < \delta^*$ ในการเลือกประชากรที่มีฟังก์ชันการกระจายแบบปกติ ถ้า θ คือค่าเฉลี่ยของประชากร พิสัยของ θ จะอยู่ระหว่าง $-\infty$ และ ∞ ซึ่งจะได้

พารามิเตอร์สเปสดังรูปที่ 3 แต่ถ้าเป็นการเลือกประชากรที่มีฟังก์ชันการกระจายแบบทวินาม และ θ แทนความน่าจะเป็นที่จะเกิด success 1 ครั้ง พิสัยของ θ จะอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งจะได้พารามิเตอร์สเปสดังรูปที่ 4

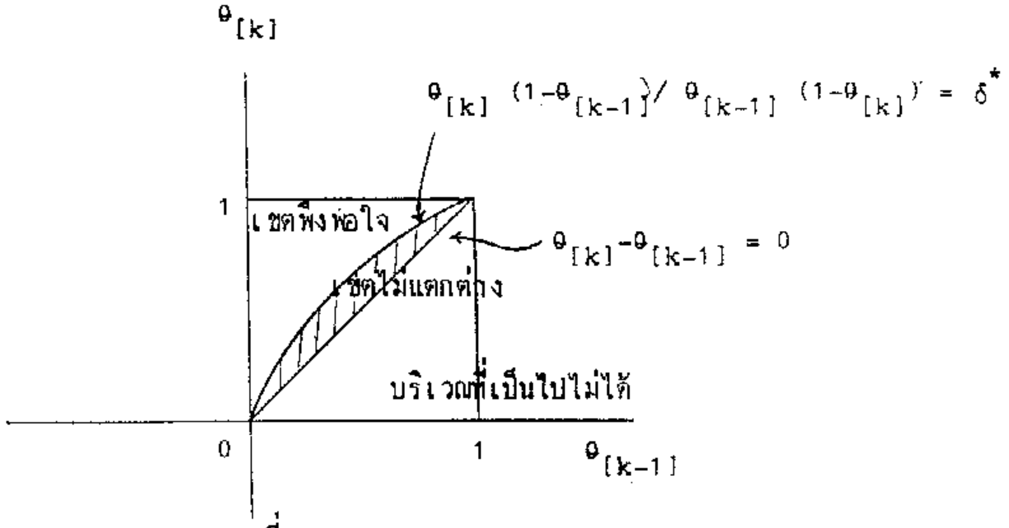


รูปที่ 4

การเลือกประชากรที่มีฟังก์ชันการกระจายแบบทวินาม เราอาจจะนิยามมาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ ในรูปของ odd ratio ได้ดังนี้

$$\delta_{OR} = \frac{\theta_{[k]}\,(1-\theta_{[k-1]})}{\theta_{[k-1]}\,(1-\theta_{[k]})}$$

ซึ่งสามารถจะแปลความหมายในลักษณะอัตราส่วนระหว่าง $\theta_{[k]}/(1-\theta_{[k]})$ กับ $\theta_{[k-1]}/(1-\theta_{[k-1]})$ หรือสัดส่วนของ odd for success ของประชากรที่ดีที่สุดกับประชากรที่ดีถัดไปนั่นเอง ในกรณีนี้เขตไม่แตกต่างจะกำหนดโดยค่า $\delta_{OR} < \delta^*_{OR}$ สำหรับ δ^*_{OR} ที่กำหนดให้และเขตพึงพอใจกำหนดโดย $\delta_{OR} \geq \delta^*_{OR}$ ซึ่งจะได้พารามิเตอร์สเปสดังแสดงในรูปที่ 5



รูปที่ 5

ในกรณีที่ มาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ถูกกำหนดในรูปของอัตราส่วน บางครั้งเราสามารถจะแปลงรูปให้มาอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นได้ เช่น ถ้าพิสัยของ θ อยู่ระหว่าง (o, ∞) และกำหนดให้มาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ เป็นอัตราส่วนของพารามิเตอร์ตัวที่โตที่สุดและตัวที่โตถัดไป นั่นคือ $\delta_R = \theta_{[k]}/\theta_{[k-1]}$ เขตไม่แตกต่างจะถูกกำหนดโดย $1 \le \delta_R < \delta_R^*$ และเขตพึงพอใจจะถูกกำหนดโดย $\delta_R \ge \delta_R^*$ ถ้ากำหนดให้ $\widetilde{\theta} = \log \theta$ เราสามารถเปลี่ยน มาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ที่เป็นอัตราส่วนมาอยู่ในรูปของเส้นตรงได้ดังนี้

$$\log \delta_R = \log \theta_{[k]} - \log \theta_{[k-1]}$$

$$\text{หรือ} \quad \widetilde{\delta}_R = \widetilde{\theta}_{[k]} - \widetilde{\theta}_{[k-1]}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ามาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์อยู่ในรูปของ odd ratio เราก็สามารถแปลงรูปให้เข้าสู่รูปที่ง่ายขึ้นได้ โดยการกำหนดให้ $\widetilde{\theta} = \log \left[\frac{\theta}{1-\theta} \right]$

จะเห็นได้ว่า มาตรการวัดโดยใช้ระยะเป็นเกณฑ์ จะอยู่ในรูปของฟังก์ชั่น $\theta_{[k]}$ และ $\theta_{[k-1]}$ ซึ่งไม่ทราบค่า แต่ δ^* เป็นตัวที่กำหนดขึ้น เพื่อแสดงขอบเขตในการ

เลือกความน่าจะเป็นของการเลือกถูกภายใต้รูปแบบ (**Configuration**) ใด ๆ ของ θ เขียนแทนด้วย $P(CS|\theta)$ ความน่าจะเป็นนี้ควรจะมีค่าสูงเมื่อ θ อยู่ในเขตพึงพอใจ และควรมีค่าต่ำเมื่อ θ อยู่ในเขตไม่แตกต่าง ดังนั้น θ ที่อยู่ในเขตพึงพอใจจึงเป็นเซ็ทที่เราให้ความสนใจ แต่เนื่องจากในเขตพึงพอใจจุดที่มีค่าของ θ แตกต่างกันมีมากมายนับไม่ถ้วน การหาค่าความน่าจะเป็นของการเลือกถูก เมื่อ θ อยู่ในเขตพึงพอใจจึงไม่ใช่เรื่องที่ง่ายนัก อย่างไรก็ตามนักสถิติพบว่ามีบางรูปแบบ (**Configuration**) ของ θ ในเขตพึงพอใจที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการเลือกถูกต่ำกว่ารูปแบบอื่น ๆ ของ θ ทั้งหมด รูปแบบของ θ ที่มีความน่าจะเป็นของการเลือกต่ำสุดนี้เรียกว่า รูปแบบที่พึงปรารถนาน้อยที่สุด (**Least favorable configuration**) เรียกย่อ ๆ ว่า รูปแบบ **LF** (**LF configuration**) ความน่าจะเป็นของการเลือกถูกสำหรับรูปแบบนี้เขียนแทนด้วย $P(CS|\theta_{LF})$ ซึ่งสำหรับทุกค่าของ θ ที่อยู่ในเขตพึงพอใจ $P(CS|\theta) > P(CS|\theta_{LF})$ เสมอ ดังนั้นรูปแบบของ θ_{LF} จึงได้รับความสนใจมากกว่ารูปแบบอื่น ๆ ของ θ ที่อยู่ในเขตพึงพอใจทั้งหมด ซึ่งทำให้ปัญหาในการหาความน่าจะเป็นของการเลือกถูก เมื่อ θ อยู่ในเขตพึงพอใจง่ายขึ้น

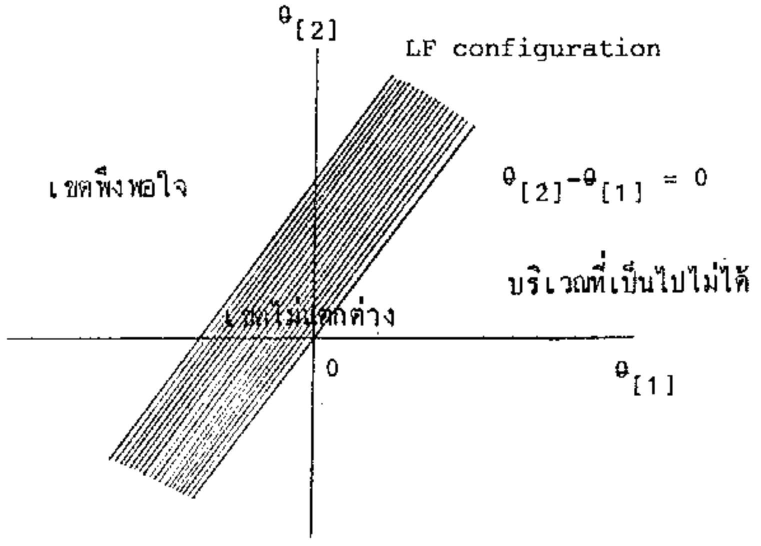
ถ้ากำหนดให้ δ เป็นความแตกต่างระหว่างพารามิเตอร์ของประชากรที่ดีที่สุด $\theta_{[k]}$ และของประชากรที่ดีรองลงมา $\theta_{[k-1]}$ เราก็สามารถที่จะหาความน่าจะเป็นต่ำสุดในเทอมของฟังก์ชันของ δ^* และ n ได้ และเมื่อกำหนดความน่าจะเป็นให้ สมมุติเท่ากับ P^* เราก็สามารถที่จะหาค่าจำนวนตัวอย่างต่ำสุด n ได้ การกำหนดค่า P^* จะกำหนดให้อยู่ระหว่าง $\frac{1}{k}$ กับ 1 เพราะถ้ามี k ประชากร และต้องการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร ความน่าจะเป็นที่จะเลือกประชากรใดประชากรหนึ่งเป็นประชากรที่ดีที่สุดเท่ากับ $\frac{1}{k}$ โดยไม่ต้องสุ่มตัวอย่างมาพิจารณา ดังนั้นการกำหนดค่า P^* จึงควรกำหนดให้มีค่ามากกว่า $\frac{1}{k}$ เสมอ ในทางปฏิบัติจริง เรามักจะกำหนดค่าของ P^* ให้เท่ากับ 0.90, 0.95, 0.975 หรือ 0.99 ส่วนการคำนวณหาค่าของ n นั้น สามารถทำได้โดยอาศัยตารางสำเร็จรูปซึ่งขึ้นอยู่กับค่าของ δ^*, k, P^* และขึ้นกับการกระจายของประชากรด้วย ค่า n ที่ได้นี้จะใช้เป็นขนาดตัวอย่าง

ต่ำสุดของตัวอย่างที่จะสุ่มจากแต่ละประชากรเพื่อการเลือกประชากรที่ดีที่สุด โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างมาพิจารณา ถ้าค่าของพารามิเตอร์ของประชากรที่ถูกเลือกเท่ากับ θ_s และพารามิเตอร์ของประชากรที่ดีที่สุดเท่ากับ $\theta_{[k]}$ จะได้ว่า $\theta_{[k]} - \theta_s < \delta^*$ ด้วยความมั่นใจอย่างน้อยที่สุด P^*

ค่าของ P^* เป็นค่าความน่าจะเป็นที่บอกถึงขอบเขตต่ำสุดของความน่าจะเป็นในการเลือกถูก เมื่อ θ อยู่ในเขตพึงพอใจ การประเมินกฎการเลือกใด ๆ เมื่อกำหนดขนาดของตัวอย่างมาให้ เราต้องการทราบ $P\ (CS|\theta)$ มากกว่า $P\ (CS\ |\theta_{LF})$ โดยเฉพาะค่าของ θ ที่อยู่ในเขตพึงพอใจ รูปแบบของ θ ที่เราสนใจเป็นพิเศษคือ รูปแบบทั่วไปที่พึงปรารถนาน้อยที่สุด (Generalized least favorable configuration) หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า GLF ซึ่งรูปแบบดังกล่าวนี้ อาจนิยามได้ดังนี้

$$\theta_{[1]} = \theta_{[2]} = \cdots = \theta_{[k-1]} = \theta' \text{ และ } \delta = \theta_{[k]} - \theta'$$

เมื่อกำหนดค่าของ θ' และ δ รูปแบบนี้จะกลายเป็นรูปแบบ LF ซึ่งเป็นรูปแบบพิเศษของรูปแบบ GLF



รูปที่ 6

ตัวอย่างเช่น กรณีที่มี 2 ประชากร เส้นตรง $\theta_{[2]} - \theta_{[1]} = \delta^*$ คือรูปแบบของ LF แต่พื้นที่ $\theta_{[1]} < \theta_{[2]}$ เป็นรูปแบบของ GLF ดังแสดงในรูปที่ 6

เมื่อกำหนดค่า n ให้ฟังก์ชันของ $P(CS|\theta_{GLF})$ สามารถคำนวณได้ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ δ และ θ' (บางครั้งอาจเป็นฟังก์ชันของ δ เพียงตัวเดียว) เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **Operating Characteristic Function** ของวิธีการเลือก และกราฟของฟังก์ชันนี้จะเรียกว่า **Operating Characteristic Curve** ซึ่งกราฟนี้จะให้ค่าที่ถูกต้องของความน่าจะเป็นในการเลือกประชากรที่ถูกต้องภายใต้รูปแบบ GLF และให้ค่าต่ำสุดของความน่าจะเป็นในการเลือกถูกต้องภายใต้รูปแบบอื่น ๆ ทั้งหมด สำหรับค่า n ใด ๆ ค่าที่แท้จริงของความน่าจะเป็นในการเลือกถูกขึ้นอยู่กับค่าที่แท้จริงของ $\theta_{[k]}$ และ θ' และขึ้นอยู่กับรูปแบบจริงเฉพาะของค่า θ ซึ่งโดยทั่วไปจะไม่มีสูตรง่าย ๆ สำหรับการคิดคำนวณ

ขั้นตอนในการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากรจาก k ประชากร

1. กำหนด k ประชากรที่ต้องการจะเลือก และนิยามประชากรที่ดีที่สุด
2. กำหนดตัวสถิติ T ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าสังเกต การเลือกใช้ตัวสถิติ T ใด ๆ ย่อมขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ที่วางไว้ ลักษณะของการแจกแจงประชากรและพารามิเตอร์ที่สนใจ และคุณสมบัติของตัวประมาณค่าที่ดี เช่น T อาจจะเป็นค่าเฉลี่ย มัธยฐาน หรือความแปรปรวนก็ได้
3. กำหนดความแตกต่างระหว่างประชากรที่ดีที่สุดกับประชากรที่ดีที่สุดเป็นอันดับสองสมมติเท่ากับ δ^* และกำหนดความน่าจะเป็นที่จะเลือกประชากรที่ดีที่สุดได้ถูกต้องมากกว่าหรือเท่ากับ P^* นำค่า k, δ^* และ P^* ไปเปิดตาราง คำนวณขนาดตัวอย่างที่จะต้องสุ่มจากแต่ละประชากร
4. คำนวณค่าสถิติ T ที่กำหนดในข้อ 2 จากตัวอย่างที่สุ่มได้จากทุกประชากร ซึ่งจะได้ค่าสถิติ $T_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$

5. เรียงลำดับค่าสถิติ T_i ; $i = 1, 2, \ldots$ k จากค่าน้อยสุดถึงค่ามากที่สุด เลือกประชากรที่มีค่าสถิติ $T_{[k]}$ เป็นประชากรที่ดีที่สุด ในกรณีที่ r ประชากรมีค่าสถิติ T สูงสุดเท่ากันกล่าวคือ

$$T_{[k]} = T_{[k-1]} = \ldots = T_{[k-r+1]} > T_{[k-r]}$$

ให้สุ่ม 1 ประชากรจาก r ประชากรที่ให้ค่าสถิติ T เท่ากัน ความน่าจะเป็นที่ประชากรใดประชากรหนึ่ง ใน r ประชากรจะถูกเลือกเป็นประชากรที่ดีที่สุดเท่ากับ $\frac{1}{r}$

ตัวอย่างการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร จาก k ประชากร ที่มีการแจกแจงแบบปกติ

ตัวอย่างในการพิจารณาเลือกเนื้อผ้า เช่น ผ้าไหม ผ้าแพรเทียม หรือผ้าไนลอน เกณฑ์ในการคัดสินคุณภาพของสิ่งทอเหล่านี้ได้แก่ **denier** ซึ่งหมายถึงน้ำหนักของเนื้อผ้าที่มีขนาดความยาวที่กำหนดให้ และมีความกว้างมาตรฐาน โดยถือคุณภาพของผ้าดีมากเมื่อผ้ามีน้ำหนักมาก ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้มีลักษณะคล้ายกับวิธีการนับเส้นด้าย (**thread count**) ซึ่งใช้จำนวนของเส้นด้ายต่อตารางนิ้วในเนื้อผ้าที่ทอแล้วเป็นเกณฑ์ วิธีการนับเส้นด้ายใช้ในการวัดคุณภาพของผ้าปูที่นอนลินิน เช่น ใช้แยกความแตกต่างระหว่างผ้าฝ้ายเนื้อละเอียดกับผ้ามัสลิน ปัจจัยหลายชนิดที่มีผลกระทบต่อ **denier** ของผ้าไหม ปัจจัยหนึ่งได้แก่อุณหภูมิที่ใช้ในการต้มตัวไหม ซึ่งเราอาจจะพิจารณาอุณหภูมิที่ให้ **denier** เฉลี่ยสูงสุดโดยการเปรียบเทียบ **denier** ของผ้าไหมที่ผลิตจากเส้นไหมที่มาจากหม้อต้มที่อุณหภูมิต่าง ๆ กัน สมมุติว่า **denier** ที่วัดได้มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ θ_i และมีความบ่ายเบนมาตรฐานเท่ากับ 2 ถ้าต้มตัวไหมที่อุณหภูมิต่าง ๆ กัน 6 อุณหภูมิ สิ่งที่ผู้ทำการทดลองจะต้องคิดคือ จะทำการเก็บตัวอย่างผ้าไหมที่ผลิตจากเส้นไหมที่มาจากอุณหภูมิที่ต้มตัวไหมต่าง ๆ กัน เท่าใด จึงจะชี้ให้เห็นถึงอุณหภูมิที่ดีที่สุดที่ควรใช้ในการต้มตัวไหม ถ้าผู้ทดลองได้พิจารณาปัจจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องแล้ว กำหนดให้ความแตกต่างจริงระหว่างอุณหภูมิที่ดีที่สุด 2 อุณหภูมิมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ $\delta^* = .75$ และให้ความน่าจะเป็นต่ำสุดที่จะเลือก

ประชากรได้ถูกต้องเท่ากับ $P^* = .95$ ขนาดตัวอย่าง n จะหาได้จาก $n = \left(\frac{\tau_T \sigma}{\delta^*}\right)^2$ เมื่อ τ_T หาได้จากตาราง

			P^*			
k	.75	.90	.95	.975	.99	.999
5	1.8463	2.5997	3.0552	3.4532	3.9196	4.9048
6	1.9674	2.7100	3.1591	3.5517	4.0121	4.9855
7	2.0626	2.7972	3.2417	3.6303	4.0860	5.0504

ในที่นี้ $k = 6$, $P^* = .95$ ดังนั้น $\tau_T = 3.1591$

แทนค่า $\delta^* = .75$, $\sigma = \sqrt{2}$ และ $\tau_T = 3.1591$ จะได้

ขนาดของตัวอย่างดังนี้

$$n = \left(\frac{3.1591\sqrt{2}}{0.75}\right)^2 = 35.48 \approx 36$$

นั่นคือจะต้องสุ่มตัวอย่างขนาด 36 หน่วย จากแต่ละอุณหภูมิ

เมื่อทำการสุ่มตัวอย่างแล้วคำนวณค่าเฉลี่ยของ denier ของแต่ละประชากร สมมุติว่าได้ค่าเฉลี่ยต่อเมตรเท่ากับ $T_1 = 8.7$ กรัม, $T_2 = 7.5$ กรัม $T_3 = 5.7$ กรัม $T_4 = 9.0$ กรัม $T_5 = 8.3$ กรัม $T_6 = 7.8$ กรัม ประชากรที่ดีที่สุดคือ ประชากรที่ 4 โดยมีความมั่นใจที่จะตัดสินใจถูกต้องไม่น้อยกว่า .95

บทสรุป

วิธีการเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากรจาก k ประชากร เป็นวิธีการใหม่ที่ช่วยให้การตัดสินใจเลือกประชากรที่ดีที่สุดทำได้สะดวกขึ้น เนื่องจากไม่ต้องผ่านขั้นตอนต่าง ๆ เหมือนกับวิธีการทดสอบสมมุติฐานที่ใช้อยู่เดิม นอกจากนี้เมื่อกำหนดความแตกต่างระหว่างพารามิเตอร์ของประชากรที่ดีที่สุดกับประชากรที่ดีที่สุดเป็นอันดับสอง

และความน่าจะเป็นต่ำสุดในการเลือกประชากรได้ถูกต้องมาให้ เราสามารถหาค่า n ที่เป็นขนาดตัวอย่างต่ำสุดที่จะต้องสุ่มจากทุกประชากร ซึ่งมีความเชื่อมั่นที่ระดับ P^* ว่าข้อมูลที่ได้นั้นสามารถใช้ในการพิจารณาเลือกประชากรที่ดีที่สุด 1 ประชากร โดยที่ค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่ดีที่สุดจริง และความแตกต่างของพารามิเตอร์ระหว่างประชากรที่ดีที่สุดและประชากรที่ดีที่สุดเป็นอันดับสองอยู่ในขอบเขตที่กำหนดให้ ซึ่งในทางปฏิบัตินั้นวิธีนี้จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับขบวนการใด ๆ ก็ตามที่เกี่ยวข้องกับการเลือก เช่น การเลือกผลิตภัณฑ์ที่ผลิตจากแหล่งต่าง ๆ กัน หรือการเลือกชนิดของวัตถุดิบชนิดเดียวกันที่มาจากแหล่งต่าง ๆ กันในโรงงานอุตสาหกรรม เป็นต้น อย่างไรก็ตาม วิธีการที่กล่าวมานี้จะใช้ในกรณีที่มีการตัดสินใจแล้วว่าจะมีการเลือกประชากรที่ดีที่สุด สำหรับกรณีที่ยังไม่แน่ใจว่าจะต้องมีการเลือกประชากรที่ดีที่สุดหรือไม่ เช่น กรณีที่ประชากรที่จะเลือกไม่แตกต่างกันเลย กระบวนการเลือกจะแตกต่างไปจากที่กล่าวไว้ในบทความนี้

หนังสืออ้างอิง

(1) Anderson, P.O., Bishop, T.T. and Dudewicz E.J. (1977) *Indifference-zone ranking and selection : confidence intervals for true achieved $P(CD)$.* Commun. Statist.-Theor. Meth. A6. 1121-1132.

(2) Gibbons, J.D., Olkin, I., and Sobel, M. (1977) *Selecting and Ordering Populations.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

(3) Gupta, S.S, and Panchapakesan, S. (1979) *Multiple Decision Procedures.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

(4) Paulson, E. (1952) *An optimum solution to the k-sample slippage problem for the normal distribuiion.* Ann. Math. Statist. 23, 610-616.