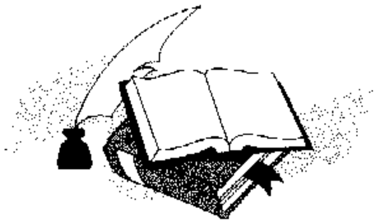

ปีที่ 29 ฉบับที่ 1

มกราคม-มีนาคม 2532

Vol. 29, No.1
January-March 1989

ปีที่ 29 ฉบับที่ 1

มกราคม - มีนาคม 2532

ISSN 0125-3689

Vol.29 No.1

January - March 1989

พัฒนบริหารศาสตร์

THAI JOURNAL OF DEVELOPMENT ADMINISTRATION

ฉบับพิเศษ 1

พฤศจิกายน 2540

การหาค่าประมาณของ RMSE ในตัวแบบเชิงสุ่มทางเดียว

พาชิตชนัต ศิริพานิช*

1. ที่มาของปัญหา

เมื่อ $\tilde{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ ในตัวแบบเชิงสถิติ (Statistical model) คำถามสำคัญที่จะถูกถามเสมอ ๆ คือ $\tilde{\theta}$ มีค่าใกล้เคียงกับ θ เพียงใด ในทางสถิติเราจะตอบคำถามเช่นนี้ได้โดยรายงานค่าประมาณของความเอียงเฉ (bias) และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ของ $\tilde{\theta}$ ควบคู่ไปกับค่าประมาณนั้น หรือเราอาจรวมค่าทั้งสองแล้วตอบคำถามนั้นด้วยค่าเพียงค่าเดียวคือ รากที่สองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (root mean squared error) ซึ่งสามารถเขียนโดยย่อได้คือ RMSE ในกรณีตัวแบบหรือตัวประมาณ (estimator) $\tilde{\theta}$ มีความซับซ้อนยุ่งยากจะทำให้ไม่ทราบ หรือไม่สามารถเขียนรูปการแจกแจง (distribution) ของ $\tilde{\theta}$ ในรูปของฟังก์ชั่นได้ ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถเขียนสูตร (formula) การคำนวณหาค่าที่แน่นอนของ RMSE ของ $\tilde{\theta}$ ได้ด้วย

พิจารณาตัวแบบผลผสม (mixed-effect model) ในรูปทั่วไป

(1) $$E(Y) = X\beta, \quad Cov(Y) = D(\gamma)$$

เมื่อ β เป็นเวคเตอร์ของผลคงที่ (fixed effect) และ γ เป็นเวคเตอร์ของส่วนประกอบความแปรปรวน (variance components) ถ้าต้องการประมาณค่า การรวมกันเชิงเส้น (linear combination) ของผลคงที่ นั่นคือ $\theta = h^T\beta$ วิธีการที่ตรงไปตรงมาที่สุด

*ผู้ช่วยศาสตราจารย์ คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

คือ การประมาณค่า θ ด้วยตัวประมาณ Gauss-Markov หรือที่เรียกโดยทั่วไปว่า BLUE (best linear unbiased estimator) โดยสมมติว่า เราทราบค่าตัวประกอบความแปรปรวน γ เมื่อได้ค่าตัวประมาณ BLUE แล้วจึงแทนค่า γ ด้วยค่าประมาณ $\hat{\gamma}$ ของ γ เรียกตัวประมาณของ θ ที่ได้จากวิธีดังกล่าวว่า $\tilde{\theta}$ เนื่องจากในการศึกษาครั้งนี้เราไม่ได้สนใจศึกษาตัวประมาณที่ดีที่สุดของ θ แต่เราสนใจว่า หาก $\tilde{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่เราสนใจแล้ว เราจะหาตัวประมาณของ RMSE ของ $\tilde{\theta}$ ได้อย่างไร ปัญหานี้จะยุ่งยากซับซ้อนขึ้นเมื่อตัวแบบเชิงสถิติเป็นตัวแบบอสมดุลย์ (unbalance) และมีตัวประกอบ ความแปรปรวนมากกว่า 1 ตัวขึ้นไป ทั้งนี้เพราะ $\tilde{\theta}$ ไม่เป็นตัวประมาณเชิงเส้น

วิธีการทั่ว ๆ ไปในการศึกษาเพื่อหาตัวประมาณของ RMSE($\tilde{\theta}$) มี 2 วิธีใหญ่ ๆ คือ วิธีแรกเป็นการหาสูตร (ที่แท้จริงหรือสูตรโดยประมาณ) ของ RMSE($\tilde{\theta}$) ในเทอมของตัวประกอบความแปรปรวน γ อีกวิธีหนึ่งคือวิธี บูทสแทรป (Bootstrap method)

ในหัวข้อที่ 2-5 เราจะได้กล่าวถึงวิธีการข้างต้นในรูปทั่วไปของตัวแบบ ANOVA ชนิดผลผสม กรณีที่ง่ายที่สุดของตัวแบบนี้คือ ตัวแบบทางเดียว (one-way model) ซึ่งเราจะพิจารณาในหัวข้อที่ 6 หัวข้อที่ 7 และ 8 เป็นเรื่องเกี่ยวกับการพิจารณาหาค่าประมาณของการแจกแจงบูทสแทรป และการประมาณค่าผลเชิงสุ่มเพื่อใช้ในการหาค่าประมาณบูทสแทรป ซึ่งจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ กรณีแบบแผนสมดุลย์ (หัวข้อ 10) และแบบแผนอสมดุลย์ (หัวข้อ 11)

2. ตัวประมาณของ RMSE ในตัวแบบ ANOVA

ตัวประมาณ Gauss-Markov ของ $\theta = h^T\beta$ ในตัวแบบ (1) คือ

(2) $$\hat{\theta} = h^T(X^T D^{-1} X)^{-1} X^T D^{-1} Y$$

เราจะสมมุติให้ X มีสดมภ์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent columns) และให้ $D = D(\gamma)$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งหาเมตริกซ์ผกผันได้ ให้ $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(Y)$ เป็นตัวประมาณของตัวประกอบความแปรปรวน และให้ $\hat{D} = D(\hat{\gamma})$ ดังนั้น $\tilde{\theta}$ จะมีค่าดังนี้

(3) $$\hat{\theta} = h^T (X^T \hat{D}^{-1} X)^{-1} X^T \hat{D}^{-1} Y$$

และ RMSE$(\tilde{\theta})$ $= (E[\hat{\theta}-\theta)^2])^{\frac{1}{2}}$

จะเห็นได้ว่า $\tilde{\theta}$ เป็นตัวประมาณแบบไม่ใช่เชิงเส้น ดังนั้น การที่จะหาสูตรของ RMSE$\tilde{\theta}$) ในรูปของเมตริกซ์ D หรือในรูปของ γ ทำได้ยุ่งยากหรืออาจหาไม่ได้เลย เท่าที่ทราบมีผู้หาสูตรที่แท้จริง (exact formula) ของ RMSE$(\tilde{\theta})$ เฉพาะในกรณีที่ Y มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution) และตัวประกอบความแปรปรวนมีได้ไม่เกิน 2 ตัว (ดู Saleh, 1987) อย่างไรก็ตามมีผู้คิดสูตรโดยประมาณ (approximate formula) ของ RMSE$\tilde{\theta}$) ไว้ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

3. ตัวประมาณ naive

หากเราคิดเสมือนหนึ่งว่าความปรปรวน variability ของตัวประกอบความแปรปรวนมีค่าน้อยมาก ดังนั้น $\hat{\theta}$ จากสมการ (2) และ $\hat{\theta}$ จากสมการ (3) จะมีพฤติกรรมใกล้เคียงกัน ดังนั้น RMSE$(\tilde{\theta})$ จะมีค่าโดยประมาณใกล้เคียงกับ SE$(\hat{\theta})$ และเนื่องจาก $\tilde{\theta}$ เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของค่าสังเกต Y ดังนั้น สูตรที่แท้จริงของ SE$\hat{\theta}$) สามารถหาได้ในเทอมของตัวประกอบความแปรปรวน ดังนี้

(4) $$SE(\hat{\theta}) = [h^T (X^T \hat{D}^{-1} X)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

โดยการสมมุติแบบ "naive" จะได้สูตรประมาณของ RMSE($\tilde{\theta}$) จากการแทนค่า γ ด้วย $\hat{\gamma}$ และเราใช้สัญญลักษณ์แทนตัวประมาณนี้ว่า $R\hat{M}SE_N$ (N มาจากคำว่า naive)

(5) $$R\hat{M}SE_N = [h^T(X^T\hat{D}^{-1}X)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

4. ตัวประมาณ Kackar-Harville (KH)

Kackar และ Harville (1984) พิสูจน์ให้เห็นว่า ถ้าผลเชิงสุ่ม (random effects) ของตัวแบบมีการแจกแจงแบบปกติ และถ้าตัวประมาณ $\hat{\gamma}$ ของตัวประกอบความแปรปรวน γ มีคุณสมบัติเป็น invariant แล้ว SE($\hat{\theta}$) จะมีค่าน้อยกว่า RMSE($\tilde{\theta}$) เสมอ ดังนั้นเมื่อ $R\hat{M}SE_N$ ซึ่งเป็นตัวประมาณของ SE($\hat{\theta}$) แต่เรานำมาประมาณค่า RMSE($\tilde{\theta}$) ตัวประมาณนี้มักจะทำให้มีการคาดคะเนต่ำกว่าระดับ (understimate) ค่าที่แท้จริงอยู่เสมอ

กำหนดให้ $$Q = \left[RMSE(\tilde{\theta})\right]^2 - \left[SE(\hat{\theta})\right]^2 = MSE(\tilde{\theta}) - Var(\tilde{\theta})$$

ดังนั้น

(6) $$MSE(\tilde{\theta}) = [Var(\hat{\theta}) + Q]^{\frac{1}{2}}$$

KH (1984, หน้า 854) แสดงวิธีประมาณค่า Q ด้วย Q_{KH} และพบว่าสูตรโดยประมาณของ RMSE($\tilde{\theta}$) ที่เหมาะสมกว่า คือ $[Var(\hat{\theta}) + Q_{KH}]^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้นเมื่อใส่ค่า $\hat{\gamma}$ แทนลงไปที่ γ เราจะได้ตัวประมาณตัวใหม่คือ

(7) $$RMSE_{KH} = (RMSE_N^2 + \hat{Q}_{KH})^{\frac{1}{2}}$$

จะเห็นได้ว่า $R\hat{M}SE_{KH}$ ได้จากการปรับ $R\hat{M}SE_{N}$ จากเงื่อนไขที่ว่า $R\hat{M}SE(\tilde{\theta}) \neq SE(\hat{\theta})$ ดังนั้น เราย่อมหวังว่า $R\hat{M}SE_{KH}$ จะเป็นตัวประมาณของ RMSE($\tilde{\theta}$) ที่ดีกว่า แต่เนื่องจาก $R\hat{M}SE_{KH}$ หามาภายใต้ข้อสมมุติว่า ค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นในกรณีที่การแจกแจงเป็นแบบอื่น ๆ เรายังไม่อาจสรุปได้ว่าตัวประมาณใดเป็นตัวประมาณที่ดี

5. ตัวประมาณแบบบูทสแทรป (Bootstrap estimator)

Efron (1979) ได้คิดค้นวิธีการทางสถิติแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ โดยอาศัย การจำลอง (simulation) จากตัวอย่างที่มีอยู่ เพื่อคำนวณหาค่าประมาณของ SE หรือ RMSE ของตัวประมาณ วิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า วิธีบูทสแทรป วิธีการของเอฟรอน (1982 บทที่ 5) เป็นวิธีการที่จะหาค่าประมาณ SE หรือ RMSE ในกรณีของตัวอย่างที่เป็น iid (independent indentically distributed) โดยเริ่มจากการประมาณการแจกแจง $\hat{F}$ ของเวคเตอร์ของค่าสังเกต Y ด้วยวิธีสถิติแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ ให้ $Y_1^*, \ldots, Y_{NB}^*$ เป็น iid เวคเตอร์เชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ $\hat{F}$ ดังนั้นตัวประมาณบูทสแทรปของ RMSE ของ $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(Y)$ คือ

$$R\hat{M}SE_C^* = \{ NB^{-1} \sum_{1}^{NB} (\tilde{\theta}_i^* - \tilde{\theta})^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

โดยที่ $\tilde{\theta}_i^* = \tilde{\theta}(Y_i^*),\ 1 = 1, \ldots, NB$ เราเรียก $R\hat{M}SE_C^*$ ว่าเป็นตัวประมาณบูทสแทรปแบบคลาสสิก (classical bootstrap estimator) ของ RMSE($\tilde{\theta}$) และเพื่อให้ $R\hat{M}SE_C^*$ เป็นตัวประมาณที่ดี NB ควรจะมีขนาดใหญ่

ความแปรปรวนของตัวประมาณ $R\hat{M}SE_C^*$ มาจากแหล่งต่าง ๆ 2 แหล่งคือ ความแปรปรวนจากเวคเตอร์เชิงสุ่ม Y ซึ่งเราจะใช้ประมาณค่า $\hat{F}$ และความแปรปรวน

จากตัวอย่างบูทสแทรป (bootstrap sample) $Y_1^*, \dots, Y_{NB}^*$ ภายใต้เงื่อนไขว่า (Conditional on) Y คือค่าสังเกตที่มีอยู่ ความแปรปรวนจากแหล่งที่สองนี้สามารถทำให้น้อยลงได้ โดยใช้ฟังก์ชั่นควบคุมแบบสไวน์เดิล (control function swindle - ดู Therneau, 1983) ดังนี้

พิจารณาค่า Q จากสมการ (6)

$$
\begin{aligned}
Q &= MSE(\tilde{\theta}) - Var(\hat{\theta}) \\
&= E[(\tilde{\theta})-\theta)^2] - E[(\tilde{\theta})-\theta)^2] \\
&= E[(\tilde{\theta})-\theta)^2 - E[(\hat{\theta})-\theta)^2]
\end{aligned}
$$

จากวิธีการของบูทสแทรป เราสามารถหาตัวประมาณของ θ ได้ดังนี้

(9) $$Q_B^* = NB^{-1} \sum_{1}^{NB} [\tilde{\theta}_1^* - \tilde{\theta})^2 - (\tilde{\theta}_i^* - \tilde{\theta})^2]$$

โดยที่ $\tilde{\theta}_i^*$ และ $\hat{\theta}_i^*$ หามาได้ดังต่อไปนี้คือ เขียนสูตร (2) เป็น $\hat{\theta} = \hat{\theta}(D, Y)$ เมื่อ $\hat{D}(Y) = D(\hat{\gamma}(Y))$ ดังนั้น $\tilde{\theta} = \hat{\theta}(\hat{D}(Y), Y), \hat{\theta}_i^* = \hat{\theta}(\hat{D}, (Y), Y_i^*)$ และ $\hat{\theta}_i^* = \hat{\theta}(\hat{D}(Y_i^*), Y_i^*)$ แทนค่า Q_B^* ในสมการ (6) จะได้ตัวประมาณของ RMSE($\tilde{\theta}$) อีกตัวหนึ่งคือ

(10) $$R\hat{M}SE_Q^* = (R\hat{M}SE_N^2 + \hat{Q}_B^*)^{\frac{1}{2}}$$

ซึ่งจะเรียกว่าตัวประมาณบูทสแทรปแบบ Q

6. กรณีเฉพาะ : ตัวแบบเชิงสุ่มทางเดียว

เพื่อเป็นการจำกัดวงการศึกษาให้แคบลง เราจะได้ศึกษาเฉพาะกรณีของตัวแบบเชิงสุ่มทางเดียว (one-way random model) เพื่อให้เห็นภาพและรู้จักตัวแบบชนิดนี้ได้

ดียิ่งขึ้น เราจึงควรพิจารณาตัวอย่างที่เกิดขึ้นจริง Bliss (1967, หน้า 259) เสนอข้อมูลซึ่งประกอบด้วยค่าวัดของความยืดหยุ่น (measurement of the modulus of elasticity) ของชิ้นไม้จากสนชนิดหนึ่งที่เรียกว่า eastern white pine trees จำนวน 17 ต้น ผู้ทดลองสุ่มชิ้นไม้จากโคนต้นสนแต่ละต้นจำนวนต่าง ๆ กัน ตั้งแต่ 2-9 ชิ้น ถ้าให้ Y เป็นค่าของความยืดหยุ่น ต้นสนเป็น treatment หรือกลุ่มของการทดลอง และเนื่องจากต้นสนที่ใช้ในการศึกษาได้มาโดยวิธีการสุ่มจากป่าสนที่กำหนด จึงทำให้ตัวแบบที่ศึกษาเป็นตัวแบบเชิงสุ่ม (random model) นอกจากนี้เนื่องจากจำนวนซ้ำ (replication) คือชิ้นไม้จากสนแต่ละต้นมีจำนวนไม่เท่ากัน ตัวแบบนี้จึงเป็นชนิดอสมดุลย์ ตัวแบบเช่นนี้เขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

(11) $$Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$$

และ $i = 1, \ldots, t$ และ $j = 1, \ldots, n_i$ โดยที่ a_i เป็นตัวแปร iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีความแปรปรวนเท่ากับ σ_a^2 และ e_{ij} เป็นตัวแปร iid ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีความแปรปรวนเท่ากับ σ_e^2 นอกจากนี้ a_i และ e_{ij} ยังเป็นอิสระต่อกันอีกด้วย เมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลของ Bliss ดังกล่าวข้างต้นแล้ว จะได้ว่า $t = 17$ และ $n_i = n_2 = n_3 = 2, n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = 3, n_{10} = n_{11} = n_{12} = n_{13} = 4, n_{14} = n_{15} = 6, n_{16} = 8,$ $n_{17} = 9$ ตัวพารามิเตอร์ μ คือค่าเฉลี่ยของความยืดหยุ่นของเนื้อไม้ จากประชากรต้นสนที่ศึกษา a_i เป็นตัวแปร iid เชิงสุ่ม ซึ่งแทนผลกระทบเชิงสุ่มของต้นสน และ e_{ij} เป็นตัวแปร iid เชิงสุ่มซึ่งแทนผลรวมของความแปรปรวนภายในต้นสนและค่าความคลาดเคลื่อน

เราอาจเขียนสมการ (11) ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

(12) $$Y = 1\mu + Za + e$$

เมื่อ 1 แทนเวคเตอร์ขนาด $N \times 1$ ของ $1 \, (N = \sum_{1}^{t} n_i)$ และ Z เป็นเมตริกซ์ขนาด $N \times t$ ซึ่งประกอบด้วยเลข 0 และ 1 ในตำแหน่งที่เหมาะสมกับแผนแบบ (design) ของ

การศึกษาหรือการทดลอง ถ้าเปรียบเทียบกับสมการ (1) ซึ่งเป็นกรณีทั่วไปแล้วจะพบว่า $X = 1, \beta = \mu, \gamma = (\sigma_a^2, \sigma_e^2)$

$D(\gamma) = \sigma_z^2 ZZ^T + \sigma_e^2 I$ และถ้าให้ $\rho = \dfrac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}$ แล้วจะได้

(13) $$\hat{\mu}_\rho = (1^T D^{-1} 1)^{-1} 1^T D^{-1} Y = \sum_{1}^{t} W_i(\rho)\bar{Y}_i$$

โดยที่ $\bar{Y}_i = \dfrac{\Sigma_j Y_{ij}}{n_i}$, $W_i(\rho) = \dfrac{c_i(\rho)}{\Sigma_k c_k(\rho)}$ และ $c_i(\rho) = \dfrac{n_i}{(n_i - \rho + 1)}$ ในกรณีที่เราไม่ทราบค่าของ ρ (intra-block correlation coefficient) อาจแทนได้ด้วย

$\hat{\rho} = \dfrac{\hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_e^2}$ ซึ่งจะทำให้

(13) $$\tilde{\mu} = \hat{\mu}_{\hat{\rho}} = \sum_{1}^{t} W_i(\hat{\rho})\,\bar{Y}_i$$

ตัวประมาณ $\tilde{\mu}$ ในสมการ (13) นี้ เป็นตัวที่ใช้กันอยู่ทั่วไปในการประมาณค่า μ ในตัวแบบ (11) หรือ (12) Bliss (1967, หน้า 261) เรียกตัวประมาณ $\tilde{\mu}$ นี้ว่า ค่าเฉลี่ยกึ่งถ่วงน้ำหนัก (semiweighted mean) สำหรับค่าประมาณอื่น ๆ ของ μ ผู้สนใจศึกษาค้นคว้าได้จากบทความต่าง ๆ เช่น Birkes, Seely และ Azzam (1981) และ Saleh (1987) เป็นต้น ส่วนค่าประมาณของ σ_a^2 และ σ_e^2 นั้น มีผู้ศึกษาไว้มากมาย (ดู Fertig และ Mann (1974), Searle (1974), Henderson (1953) และ Swallow และ Monahan (1984) เป็นต้น) ตัวประมาณที่นิยมใช้กันมาก และจะกล่าวถึงในที่นี้คือตัวประมาณที่เรียกว่า ตัวประมาณ ANOVA ของเฮนเดอร์สัน (Henderson's ANOVA estimators) นั่นคือ

$$(14)\quad \hat{\sigma}_a^2 = \begin{cases} S_a^2 = \dfrac{\sum_1^t n_i(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 - (t-1)\hat{\sigma}_e^2}{\dfrac{N - \sum_1^t n_1^2}{N}} & \text{ถ้ามีค่าเป็นบวก} \\ 0 \quad \text{กรณีอื่น ๆ} & \end{cases}$$

และ $\tilde{\sigma}_e^2 = \dfrac{\sum_1^t \sum_1^{n_i} (\overline{Y}_{ij} - \overline{Y}_i)^2}{N-1}$

เมื่อ $\hat{\sigma}_e^2 > \dfrac{\sum_1^t nLi(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2}{t-1}$ ขอเน้นให้เห็นว่า เราตัด (truncate) ค่าประมาณ σ_a^2 ที่จุดศูนย์ เนื่องจากในบางโอกาส $\sum_1^t n_i(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2$ อาจมีค่าน้อยกว่า $(t-1)\hat{\sigma}_e^2$ ซึ่งทำให้ S_a^2 มีค่าที่เป็นลบ แต่ σ_a^2 ต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ การนิยาม $\hat{\sigma}_a^2$ ดังกล่าวข้างต้นจะทำ $\hat{\sigma}_a^2$ เป็นตัวประมาณเอียงเฉ (bias estimator) ของ σ_a^2 ทั้ง ๆ ที่ $E(S_a^2) = \sigma_a^2$ และ $E(\hat{\sigma}_e^2) = \sigma_e^2$ ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 1 แล้วว่า การศึกษาครั้งนี้เรามิได้มุ่งหวังจะศึกษาถึงตัวประมาณที่ดีของ μ หรือของ σ_a^2 และ σ_e^2 แต่เรามุ่งศึกษาว่า เมื่อเจาะจงใช้ $\tilde{\mu}$ เป็นตัวประมาณของ μ แล้ว เราจะประมาณค่า RMSE ของตัวประมาณ $\tilde{\mu}$ ได้อย่างไร ในกรณีที่ตัวแบบเป็นตัวแบบสมดุลย์ (นั่นคือ $n_i = n$ ทุก ๆ ค่า i) จากสมการ (13) คือค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง $\overline{Y}$ นั่นเอง และ $RMSE(\tilde{\mu}) = SE(\tilde{\mu}) = \frac{1}{TA}(\sigma_a^2 + \frac{\sigma_e^2}{n})$ แต่ถ้าตัวแบบเป็นแบบอสมดุลย์แล้ว $\tilde{\mu}$ จะมีลักษณะเป็นสมการไม่ใช่เชิงเส้น ซึ่งทำให้ไม่สามารถหาสูตรที่แท้จริงของ $RMSE(\tilde{\mu})$ ได้ ยกเว้นกรณีที่มีข้อสมมุติว่าค่าสังเกตถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ และสูตรดังกล่าวเป็นสูตรที่สลับซับซ้อนมากพอสมควร

ในการศึกษาครั้งนี้เราจะเปรียบเทียบตัวประมาณ naive จากสมการ (5) และตัวประมาณ *KH* จากสมการ (7) กับตัวประมาณที่ได้จากวิธีบูทสแทรป ในสมการ (8) และ (10) สำหรับกรณีตัวแบบเชิงสุ่มทางเดียว ตัวประมาณ naive และ *KH* ดังกล่าวมีลักษณะดังต่อไปนี้

(15) $$R\hat{M}SE_N = \{[\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_a^2][\sum_1^t c_i(\hat{\rho})]\}^{\frac{1}{2}}$$

(16) $$R\hat{M}SE_{KH} = (R\hat{M}SE_N^2 + \hat{Q}_{KH})^{\frac{1}{2}}$$

โดยที่ $$\hat{Q}_{KH} = (\hat{Q}_a^2 + \hat{\sigma}_e^2)^{-1} \sum_i^t c_i \Big[A_1(\sum W_i^3 - (\sum W_i^2)^2$$

$$+ A_2(\sum \frac{W_i^3}{n_i} - (\sum \frac{W_i^2}{n_i})^2 - \frac{2(t-1)}{N - \sum n_i^2}(\sum \frac{W_i^3}{n_i}) - \sum W_i^3 \sum \frac{W_i^2}{n_i})) \Big]$$

$$c_i = c_i(\hat{\rho}), W_i = W_i(\hat{\rho})$$

$$A_1 = \Bigg[2\{\sum n_i^2 - \frac{2\sum n_i^3}{N} + (\frac{2\sum n_i^2}{N})^2\} \hat{\sigma}_a^4 + 2(t+1)\hat{\sigma}_a^4$$

$$+ 4(N - \frac{\sum n_i^2}{N})\hat{\sigma}_a^2 \hat{\sigma}_e^2 + (t-1)^2 A_2 \Bigg]\Bigg[N - \frac{\sum n_i^2}{N}\Bigg]$$

7. การแจกแจงบูทสแทรป

สำหรับกรณีตัวแบบเชิงสุ่มทางเดียว $Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$ $(i = 1, \ldots, t, j = 1, \ldots, n_i)$ ผลของกลุ่ม (group effects) a_i มีลักษณะเป็น iid และเช่นเดียวกันผลของความคลาดเคลื่อน (error effects) e_{ij} ก็มีลักษณะเป็น iid ด้วย ดังนั้น ถ้าเราประมาณค่า a_i และ e_{ij} ได้ (วิธีการประมาณค่าจะได้กล่าวถึงในหัวข้อ 8 ต่อไป) สมมุติให้ $\hat{A} = \{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_t\}$ และ $\hat{E} = \{\hat{e}_{11}, \ldots, \hat{a}_{tn_t}\}$ ต่างเป็นเซทของตัวทำนาย (predictors) ของ

a_i และ e_{ij} $(i = 1, ..., t$ และ $j = 1, ..., n_i)$ ตามลำดับ พิจารณาวิธีสุ่มตัวอย่างบูทสแทรป 2 วิธีต่อไปนี้คือ วิธี (a, e) method และวิธี Y-method

วิธีที่ 1 : (a, e) - method

สุ่มตัวอย่างขนาด t แบบใส่กลับ (random draw with replacement) จากเซ็ท $\tilde{A}$ และสุ่มตัวอย่างขนาด $\sum n_i$ แบบใส่กลับจากเซ็ท $\tilde{E}$ สมมุติให้ผลที่ได้เป็น $a_1^*, ..., a_t^*$ และ $e_{11}^*, ..., e_{tn_t}^*$ ดังนั้น ตัวอย่างบูทสแทรปจะได้จากสมการต่อไปนี้คือ

$$Y_{ij}^* = \tilde{\mu} + a_i^* + e_{ij}^* \ (i = 1, ..., t, \ j = 1, ..., n_j$$

วิธีที่ 2 : Y-method

วิธีนี้เป็นการสุ่มตัวอย่างแบบ 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนที่ 1 เราจะสุ่มตัวอย่างขนาด t แบบใส่กลับจากเซ็ทของเลขจำนวนเต็ม $\{1,..., t\}$ และขั้นตอนที่ 2 จะสุ่มตัวอย่างจากค่าสังเกต Y จากกลุ่มที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ 1 ในแต่ละครั้งที่สุ่มในขั้นตอนแรกนี้ เราจะทำการสุ่มตัวอย่างต่างหากจากขั้นตอนที่ 2 สมมุติว่าในการสุ่มครั้งที่ i ของขั้นตอนที่ 1 ปรากฏว่าสุ่มได้เลขจำนวนเต็มมีค่าเท่ากับ $k(1 \le k \le t)$ ดังนั้นในขั้นตอนที่ 2 เราจะทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n_i (ไม่ใช่ n_k) แบบใส่กลับจากเซ็ทของค่าสังเกตในกลุ่มที่ k นั่นคือ $\{Y_{k1}, ..., Y_{kn_k}\}$ สมมุติว่าเป็นการสุ่มครั้งที่ j ในขั้นตอนที่ 2 ผลที่ได้จะเขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ Y_{ij}^*

การหาตัวอย่างบูทสแทรปโดยวิธีทั้งสองนี้ เราทำการสุ่มทั้งสิ้น t + N ครั้ง ต่างกันตรงที่ในวิธีแรก การสุ่มทั้ง t + N ครั้งนั้นเป็นอิสระแก่กันหมด แต่วิธีที่สองไม่เป็นเช่นนั้น อย่างไรก็ตามจะพบว่า ในขณะที่ Y_{ij} และ Y_{ik} มีสหสัมพันธ์ (correlated) ต่อกัน Y_{ij}^* และ Y_{ik}^* (ทั้งสองวิธี) ก็มีสหสัมพันธ์ต่อกันเช่นเดียวกัน นั่นหมายความว่าตัวอย่างบูทสแทรปที่ได้มีคุณสมบัติในแง่นี้เช่นเดียวกับตัวอย่างเดิม จุดนี้เป็นจุดสำคัญที่พึงระวังในการใช้วิธีบูทสแทรป เนื่องจากเงื่อนไขที่จะทำให้วิธีบูทสแทรปมีประสิทธิภาพคือ

คือข้อสมมุติที่ว่าตัวอย่างบูทสแทรปมีคุณสมบัติเหมือน (หรือใกล้เคียงมากที่สุด) กับตัวอย่างเดิม (ซึ่งถือว่าเป็นตัวอย่างที่เป็นตัวแทนที่ "ดี" ของประชากรที่ต้องการศึกษา) โปรดสังเกตว่า วิธี y-method นั้น เราไม่จำเป็นต้องทราบค่าทำนาย (predicted values) ของ a_i และ e_{ij} อีกทั้งไม่จำเป็นต้องมีข้อสมมุติว่า ตัวแบบเป็นแบบเชิงเส้น ในแง่นี้วิธีที่ 2 มี robustness มากกว่าวิธีแรก

8. ตัวทำนายผลเชิงสุ่ม (Predictors of random effects)

Henderson (1953) และ Harville (1976) ได้เสนอตัวประมาณ/ตัวทำนายของผลรวมเชิงเส้นระหว่างผลคงที่ และผลเชิงสุ่ม และถ้าเราทราบค่าตัวประกอบความแปรปรวนแล้ว ตัวประมาณ/ตัวทำนายดังกล่าว จะมีคุณสมบัติว่ามีค่า MSE น้อยที่สุดในชั้น (class) ของตัวประมาณ/ตัวทำนายที่ไม่เอียงเฉ ในกรณีที่เราไม่ทราบค่าตัวประกอบความแปรปรวน เราจะแทนด้วยตัวประมาณของมัน ซึ่งในกรณีของตัวแบบทางเดียว (สมการ 12) พบว่าตัวทำนายของ a_i และ e_{ij} โดยวิธีของเฮนเดอร์สันเป็นดังนี้

(17)
$$\hat{a}_i^H = \hat{\rho} c_i (\bar{Y}_i - \tilde{\mu})$$
$$\hat{e}_i^H = \hat{Y}_{ij} - \tilde{\mu} - \hat{a}_i^H$$

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า เราจะพยายามจำลองลักษณะของตัวอย่างบูทสแทรปให้คล้ายคลึงกับตัวอย่างเดิมมากที่สุด และคุณสมบัติที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่เราต้องการคือ

(18)
$$E_*(SSA^*) = SSA$$
$$E_*(SSE^*) = SSE$$

เมื่อเทอมที่มี * หมายถึง เทอมที่คำนวณภายใต้การแจกแจงบูทสแทรปของ Y^* และ SSA = ผลรวมกำลังสอง (Sum of squares) ของผลจากกลุ่ม และ SSE คือผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ผลที่ตามมาที่น่าสนใจคือ เราจะได้ว่า

$Var_*(a_i^*) = \sigma_a^2$ และ $Var_*(e_{ij}^*) = \sigma_e^2$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติของ a_i และ e_{ij} ที่ว่า $Var(a_i^*) = \sigma_a^2$ และ $Var(e_{ij}^*) = \sigma_e^2$

เงื่อนไขที่สำคัญที่จะทำให้ สมการ (18) เป็นจริงทั้งคู่คือ (ดู Lee (1985))

(19) (i) $$\sum_i^t \hat{a}_i = 0 = \sum_1^t \sum_1^{n_i} \hat{e}_{ij}$$

(ii) $$\sum_i^t \hat{a}_i^2 = t\hat{\sigma}_a^2 \quad \text{และ} \quad \sum_1^t \sum_1^{n_i} (\hat{e}_{ij})^2 = N\hat{\sigma}_e^2$$

พบว่าตัวทำนายของเฮนเดอร์สันในสมการ (17) มีคุณสมบัติตามข้อ (i) แต่ไม่มีคุณสมบัติข้อ (ii) ของสมการ (19) ดังนั้น Lee (1985) จึงแนะนำให้ใช้ตัวทำนายของ a_i และ e_{ij} ต่อไปนี้คือ

(20) $$\hat{a}_i^L = \left[\frac{t\hat{\sigma}_a^2}{\sum_1^t (\overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}})^2}\right]^{\frac{1}{2}} (\overline{Y}_{ij} - \overline{\overline{Y}})$$

$$\hat{e}_{ij}^L = \left(\frac{N}{N-T}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)$$

โดยที่ $\overline{\overline{Y}} = \frac{1}{t} \sum_1^t \overline{Y}_i$ และ $\overline{Y}_i = \frac{1}{n_i} \Sigma_j Y_{ij}$

ในการศึกษาโดยใช้วิธีการจำลอง (simulation) หรือเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo) กับการวางแผน (design) 3 แบบ การแจกแจงต่าง ๆ 3 ชนิด และด้วยค่าตัวประกอบความแปรปรวนต่าง ๆ 3 ค่า รวมเป็น 27 สถานการณ์ ในแต่ละสถานการณ์จะมีการจำลองตัวอย่างจำนวน 200 ตัวอย่าง ในแต่ละตัวอย่างจะสุ่มตัวอย่างบูท-สแทรปออกมาอีก 200 ตัวอย่าง พบว่าค่า $RM\hat{S}E_C^*(\bar{\mu})$ ที่ได้จากการใช้ $\hat{a}_i^H$ และ $\hat{c}_i^H$

มีแนวโน้มค่อนข้างที่จะทำให้เกิดการคาดคะเนต่ำกว่าระดับค่าที่แท้จริงเป็นส่วนใหญ่ ดังนั้นในการศึกษาขั้นต่อไปเราจึงจะเลือกใช้ตัวทำนายของ Lee จากสมการ (20) เท่านั้น

9. วิธีการศึกษา

ถึงแม้นว่าที่ผ่านมาจะได้กล่าวถึงการประมาณค่า $RMSE(\tilde{\mu})$ อยู่ตลอดเวลา แต่ในการศึกษาต่อไปนี้ สิ่งที่จะพิจารณาคือ $MSE(\tilde{\mu}) = RMSE^2(\tilde{\mu})$ เนื่องจาก $RMSE(\tilde{\mu})$ มีหน่วยเช่นเดียวกับ $\tilde{\mu}$ ดังนั้น จึงเป็นการง่ายและสะดวกในการแปลความหมาย วัดประสิทธิภาพ และความแม่นยำของ $\tilde{\mu}$ ได้ดีกว่า $MSE(\tilde{\mu})$ แต่เมื่อต้องการเปรียบเทียบตัวประมาณต่าง ๆ ที่ใช้วัดประสิทธิภาพและความแม่นยำของ $\tilde{\mu}$ โดยเลือกระหว่าง $RMSE(\tilde{\mu})$ และ $MSE(\tilde{\mu})$ เราย่อมเลือก $MSE(\tilde{\mu})$ ทั้งนี้ด้วยเหตุผลที่สำคัญคือ การเปรียบเทียบทำได้ง่ายกว่า และการคำนวณเป็นไปอย่างตรงไปตรงมา

ตัวประมาณที่ต้องการเปรียบเทียบในที่นี้มี 6 ตัว ดังนี้

1) $M\hat{S}E_N$ = ตัวประมาณ naive (ดูสมการ 15)
2) $M\hat{S}E_{KH}$ = ตัวประมาณของ Kackar และ Harville (ดูสมการ 16)
3) $M\hat{S}E^*_{CL}$ = ตัวประมาณบูทสแทรปแบบคลาสสิคโดยใช้สูตรของ Lee กับ (a, e)-method ในการหาตัวอย่างบูทสแทรป
4) $M\hat{S}E^*_{CY}$ = ตัวประมาณบูทสแทรปแบบ Q โดยใช้สูตรของ Lee กับ (a, e)-method ในการหาตัวอย่างบูทสแทรป
5) $M\hat{S}E^*_{CY}$ = ตัวประมาณบูทสแทรปแบบคลาสสิค โดยใช้ Y-method ในการหาตัวอย่างบูทสแทรป
6) $M\hat{S}E^*_{QY}$ = ตัวประมาณบูทสแทรปแบบ Q โดยใช้ Y-method ในการหาตัวอย่างบูทสแทรป

(สำหรับตัวประมาณในข้อ 3-6 ดูสมการ 8 และ 10 และหัวข้อ 7 และ 8 ประกอบ)

ในการเปรียบเทียบตัวประมาณทั้ง 6 ตัวนี้ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่แผนแบบการทดลองเป็นแบบสมดุลย์ และแบบอสมดุลย์ เนื่องจากว่าตัวแผนแบบการทดลองเป็นแบบสมดุลย์ เราจะสามารถศึกษาได้ทั้งทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ (โดยใช้การจำลอง) ซึ่งไม่ก่อให้เกิดความยุ่งยากมากนักในการศึกษาทางทฤษฎี โดยหวังว่าผลที่ได้จะช่วยชี้นำผลที่ควรจะเป็นหรือแนวทางที่จะเป็น เมื่อแผนแบบการทดลองเป็นแบบอสมดุลย์ และไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม เราจะศึกษาโดยจำลองตัวอย่งในสถานการณ์ต่าง ๆ มาสถานการณ์ละ 200 ตัวอย่าง และในแต่ละตัวอย่าง หากเป็นวิธีบูทสแทรป เราจะสุ่มตัวอย่างบูทสแทรปจำนวน 200 ตัวอย่าง สถานการณ์ต่าง ๆ ที่พิจารณาคือ พิจารณาค่า $\rho = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2+\sigma_e^2}$ ต่าง ๆ 3 ค่า คือ .10, .45 และ .90 นอกจากนี้ยังพิจารณารูปแบบการแจกแจงลักษณะต่าง ๆ 5 รูปแบบ ดังแสดงในตาราง 1

ตารางที่ 1 รูปแบบการแจกแจงที่ใช้ในการศึกษา

การแจกแจง	สัญญลักษณ์	ฟังก์ชันความหนาแน่น (density function)	ความเบ้ (skewness)	ความหนาของส่วนปลาย (kurtosis)
1) แบบปกติ (มาตรฐาน)	NORM	$F_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{x^2}{2})$	0	0
2) แบบปกติสมบูรณ์	ABN	$F_X(X) = (1-\varepsilon) f_Z(\frac{x}{\tau_1}) + \Sigma f_{\|Z\|}(\frac{x}{\tau_2})$ เมื่อ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (ดูข้อ 1) โดย $\varepsilon = .36,\ \tau_1 = 1,\ \tau_2 = 7.56$	1.1	2
3) แบบตูกีย์	TUK	$F_X(X) = (1-\varepsilon) f_Z(\frac{x}{\tau_1}) + \Sigma f_{\|Z\|}(\frac{x}{\tau_2})$ โดยที่ $\varepsilon = .1,\ \tau_1 = .53,\ \tau_2 = 5.24$	0	6
4) แบบที	T(5)	$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\upsilon+1}{2})(1+\frac{x^2}{\upsilon})^{-(\frac{\upsilon+1}{2})}}{\sqrt{\pi\upsilon}\ \Gamma(\frac{\upsilon}{2})}$ โดยที่ $\upsilon = 5$	0	6
5) แบบเปียร์สัน	PSN	$f_X(x) = \frac{\Gamma(q_1)(a_2-a_1)(x-a_2)^{q_2}}{\Gamma(q_1-q_2-1)\Gamma(q_2+1)(x-a_1)^{q_1}}$ โดยที่ $q_1 = 1,\ q_2 = 7.61,\ a_1 = 16.25,\ a_2 = 1.72$	1.8	6

10. แผนแบบสมดุลย์ (Balanced designs)

ดังที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 6 ว่า ในกรณีแผนแบบสมดุลย์ $n_i = n$ ทุก ๆ ค่า ดังนั้น $N = nt$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (13) ได้ผลลัพธ์คือ $\tilde{\mu} = \bar{Y}$ เห็นได้ชัด (การพิสูจน์ทำได้ง่าย) ว่า $\tilde{\mu}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉไม่ว่าการแจกแจงจะมีรูปลักษณะเป็นแบบใด (สมมาตรหรือไม่สมมาตรก็ตาม) ดังนั้น

$$MSE(\hat{\mu}) = Var(\hat{\mu}) = Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma_a^2}{t} + \frac{\sigma_a^2}{N}$$

เมื่อแทนค่า σ_a^2 และ σ_e^2 ด้วย $\hat{\sigma}_a^2$ และ $\hat{\sigma}_e^2$ ตามลำดับ เราจะได้ตัวประมาณดังนี้

$$M\hat{S}E_N = \frac{\hat{\sigma}_a^2}{t} + \frac{\hat{\sigma}_a^2}{N}$$

เพื่อจะทำให้การศึกษาทางทฤษฎีทำได้โดยตลอด เราจะพิจารณาในกรณี $\hat{\sigma}_a^2$ ไม่มีการตัดค่าที่ 0 (untruncate) นั่นคือให้ $\hat{\sigma}_a^2 = s_a^2$ ทุก ๆ กรณี (ดูสมการ 14) ซึ่งจะทำให้ $MSE(\tilde{\mu})$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉของ $M\hat{S}E_N$ และ

$$Var(M\hat{S}E_N) = \frac{1}{t^3}\left[K_{a_4} + \frac{K_{e_4}}{n^3}\right] + \frac{2\left[\sigma_a^2 + \frac{\sigma_e^2}{n}\right]}{t^2(t-1)}$$

เมื่อ K_{a_4} และ K_{e_4} เป็น cumulants ที่ 4 ของ a_i และของ e_{ij} ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่า $M\hat{S}E_N = M\hat{S}E_{KH} = M\hat{S}E^*_{QL} = M\hat{S}E^*_{QY}$ ทั้งนี้เพราะตัวประมาณทั้ง 3 ตัวหลังนี้ เป็นผลบวกระหว่าง $M\hat{S}E_N$ และเทอม Q ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ในกรณีแผนแบบสมดุลย์

สำหรับ $\hat{MSE}^*_{CL} = \frac{1}{NB}\sum_{1}^{NB}(\tilde{\mu}^*_i - \tilde{\mu})^2$ นั้นพบว่า

$$\hat{MSE}^*_{CL} = E[E_*(\hat{MSE}^*_{CL})] = E[\hat{MSE}_N] = MSE(\tilde{\mu})$$

และ $Var(\hat{MSE}^*_{CL}) = Var[E_*(\hat{MSE}^*_{CL})] + E[Var_*(\hat{MSE}^*_{CL})]$

เมื่อ $NB \to \infty$ จะได้ $Var_*(\hat{MSE}^*_{CL}) \to 0$ ดังนั้น สำหรับกรณีที่ NB มีค่ามาก ๆ

$$Var(\hat{MSE}^*_{CL}) \approx Var[E_*(\hat{MSE}^*_{CL})] = Var(\hat{MSE}_N)$$

ตัวประมาณตัวสุดท้ายที่ต้องพิจารณาคือ $\hat{MSE}_{CL}$ ซึ่งมีสูตรการคำนวณเช่นเดียวกับ $\hat{MSE}^*_{CL}$ นั่นคือ $\hat{MSE}_{CY} = \frac{1}{NB}\sum_{1}^{NB}(\tilde{\mu}^*_i - \tilde{\mu})^2$ ความแตกต่างอยู่ที่การได้มาซึ่งตัวประมาณ $\tilde{\mu}^*$ ในกรณีนี้เราใช้วิธี Y-method ในการสุ่มตัวอย่างบูทสแทรป ในขณะที่วิธีแรกเราใช้วิธี (a, e)-method ในการสุ่มตัวอย่างบูทสแทรป พบว่า

$$E(\hat{MSE}^*_{CL}) = E[E(\hat{MSE}^*_{CL})] = \frac{1}{t}(1-\frac{1}{t})\sigma^2_a + \frac{1}{N}(2-\frac{1}{t}-\frac{1}{N})\sigma^2_e$$

ซึ่งเป็นตัวประมาณที่เอียงเฉของ $MSE(\tilde{\mu})$ และค่าเอียงเฉเท่ากับ

$$Bias(\hat{MSE}^*_{CL}) = -\frac{1}{t^2}\sigma^2_a + \frac{1}{N}(1-\frac{1}{t}-\frac{1}{N})\sigma^2_e$$

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบ (ทางทฤษฎี) ค่า Rel $RMSE$ ระหว่าง $M\hat{S}E_N$ และ $M\hat{S}E^{*}_{CY}$ สำหรับแผนแบบสมดุลย์ $t \times n$

(a) t = 4

$k_4^{(1)}$	ρ	$N = 4$		$N = 7$		$N = 10$		$N = 17$	
		N	CY	N	CY	N	CY	N	CY
$0^{(2)}$	.10	.816	.702	.816	.670	.816	.645	.816	.620
	.45	.816	.621	.816	.626	.816	.631	.816	.640
	.90	.816	.654	.816	.657	.816	.658	.816	.659
2	.10	.880	.809	.886	.749	.904	.724	.940	.717
	.45	.983	.752	1.015	.774	1.032	.790	1.050	.809
	.90	1.068	.833	1.073	.839	1.075	.841	1.077	.844
6	.10	.994	.988	1.011	.886	1.056	.861	1.148	.880
	.45	1.252	.963	1.326	1.008	1.364	1.036	1.404	1.070
	.90	1.445	1.108	1.456	1.117	1.461	1.122	1.456	1.126
$100^{(3)}$	.10	2.455	2.926	2.566	2.461	2.855	2.416	3.396	2.627
	.45	3.959	3.067	4.343	3.284	4.533	3.413	4.736	3.559
	.90	4.933	3.708	4.989	3.750	5.012	3.767	5.034	3.784

(b) t = 7

k_4	ρ	$N = 4$		$N = 7$		$N = 10$		$N = 17$	
		N	CY	N	CY	N	CY	N	CY
0	.10	.577	.642	.577	.609	.577	.575	.577	.529
	.45	.577	.499	.577	.496	.577	.497	.577	.501
	.90	.577	.510	.577	.512	.577	.512	.577	.513
2	.10	.628	.721	.633	.670	.647	.639	.676	.614
	.45	.711	.618	.736	.633	.749	.644	.763	.659
	.90	.777	.677	.781	.682	.783	.684	.784	.686
6	.10	.719	.859	.732	.778	.768	.752	.840	.754
	.45	.921	.805	.978	.843	1.007	.866	1.039	.895
	.90	1.070	.925	1.079	.943	1.082	.937	1.086	.941
100	.10	1.843	2.414	1.927	3.068	2.147	2.056	2.558	2.257
	.45	2.985	2.629	3.276	2.826	3.420	2.938	3.574	3.066
	.90	3.723	3.194	3.765	3.230	3.782	3.245	3.799	3.259

ตารางที่ 2 (ต่อ)

(a) t = 10

$k_4^{(1)}$	ρ	N = 4 N	N = 4 CY	N = 7 N	N = 7 CY	N = 10 N	N = 10 CY	N = 17 N	N = 17 CY
0	.10	.471	.611	.471	.578	.471	.539	.471	.482
	.45	.471	.433	.471	.426	.471	.425	.471	.426
	.90	.471	.432	.471	.433	.471	.434	.471	.435
2	.10	.515	.674	.519	.627	.531	.592	.556	.553
	.45	.585	.539	.606	.548	.617	.556	.630	.568
	.90	.642	.583	.645	.587	.646	.589	.648	.591
6	.10	.592	.785	.603	.715	.634	.685	.695	.674
	.45	.763	.704	.812	.734	.836	.754	.863	.778
	.90	.889	.804	.896	.811	.900	.815	.902	.818
100	.10	1.539	2.098	1.609	1.811	1.794	1.806	2.137	1.983
	.45	2.495	2.305	2.739	2.480	2.859	2.579	2.988	2.691
	.90	3.113	2.803	3.148	2.835	3.163	2.848	3.177	2.861

(b) t = 17

k_4	ρ	N = 4 N	N = 4 CY	N = 7 N	N = 7 CY	N = 10 N	N = 10 CY	N = 17 N	N = 17 CY
0	.10	.354	.577	.354	.543	.354	.498	.354	.428
	.45	.354	.354	.354	.340	.354	.335	.354	.333
	.90	.354	.335	.354	.336	.354	.336	.354	.337
2	.10	.388	.619	.391	.576	.400	.535	.420	.480
	.45	.442	.437	.459	.439	.457	.442	.477	.449
	.90	.486	.459	.489	.462	.490	.464	.491	.465
6	.10	.448	.696	.457	.637	.480	.601	.528	.570
	.45	.580	.568	.618	.588	.637	.602	.657	.619
	.90	.678	.639	.683	.645	.686	.647	.688	.650
100	.10	1.178	1.686	1.232	1.467	1.373	1.463	1.637	1.599
	.45	1.912	1.847	2.099	1.988	2.192	2.067	2.290	2.157
	.90	2.386	2.247	2.414	2.272	2.425	2.283	2.435	2.293

(1) $\sigma_e^2 = 14{,}700 \quad \sigma_a^2 = \frac{\rho}{1-\rho}\sigma_{e4},\ K_{e4} = k_4\sigma_e^4$ และ $k_{a4} = k_4\sigma_a^4$

(2) พิจารณา $k_4 = \begin{cases} 0 & \text{เช่นสำหรับ NORM} \\ 2 & \text{เช่นสำหรับ ABN} \\ 6 & \text{เช่นสำหรับ t(5) และ PSN} \\ \infty & \text{เช่นสำหรับ t(3)} \end{cases}$

(3) $k_4 = 100$ แทน $k_4 = \infty$

และ $MSE(M\hat{S}E^*_{CL}) = Var(M\hat{S}E^*_{CL}) + Bias^2(M\hat{S}E^*_{CL})$

$$\approx \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^4(t-1)^2}{t}K_{a_4} + \frac{[n(2t-1)-t]^2}{N}K_{a_e} + n^4(2t-1)\sigma_a^4 + 2n^2[n(t-1)+t]\sigma_a^2\sigma_e^2 + [n^2(t^2-1) - 2nt(t-2)+t(t-2)]\sigma_e^4\right]$$

ในกรณีของค่าประมาณที่ได้จากวิธี CY (Classical Y-method) เราพิจารณา MSE ของค่าประมาณ เนื่องจากตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{CY}$ เป็นตัวประมาณเอียงเฉ ดังนั้น เพื่อให้การเปรียบเทียบกับตัวประมาณ $M\hat{S}E_N$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉ เป็นไปโดยเหมาะสม เราจึงปรับค่าความแปรปรวนของ $M\hat{S}E^*_{CY}$ ด้วยค่าความเอียงเฉ ในการเปรียบเทียบตัวประมาณค่าทั้งสองนี้ เราจะเปรียบเทียบด้วยค่าที่เรียกว่า Rel *RMSE* (relative root mean squared error) ซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างรากที่สองของค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน $(RMSE)$ ของตัวประมาณของ $MSE(\tilde{\mu})$ ต่อค่าที่แท้จริงของ $MSE(\tilde{\mu})$ ในที่นี้ค่า

$$\text{Rel } RMSE(M\hat{S}E_N) = \frac{[Var(M\hat{S}E_N)]^{\frac{1}{2}}}{MSE(\tilde{\mu})} \quad \text{และ}$$

$$\text{Rel } RMSE(M\hat{S}E^*_{CY}) = \frac{[MSE(M\hat{S}E^*_{CY})]^{\frac{1}{2}}}{MSE(\tilde{\mu})}$$

เราพิจารณาเปรียบเทียบค่าทั้งสองนี้ 16 กรณีคือ กรณีที่ t และ n มีค่าเท่ากับ 4, 7, 10, และ17 ค่าที่คำนวณได้แสดงในตารางที่ 2 เห็นได้ว่า Rel *RMSE* ของตัวประมาณทั้งสองมีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ K_4 มีค่าลดลง นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อ $K_4 = 0$ ค่า Rel *RMSE* ของ $M\hat{S}E_N$ มีค่าคงที่ทุก ๆ ค่า $\rho(0 \le \rho \le 1)$ และสำหรับ

ค่าอื่น ๆ ของ K_4 (=2, 6, 100) พบว่า Rel *RMSE* ของ $M\hat{S}E_N$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ ρ มีค่าสูงขึ้น ลักษณะเช่นนี้เราไม่พบใน Rel *RMSE* ของ $M\hat{S}E^*_{CY}$ เนื่องจากมันมีลักษณะไม่ใช่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทางเดียว (monotone) อย่างไรก็ตามจากการพิจารณา Rel*RMSE* ของค่าประมาณทั้งสองนี้อาจพอสรุปได้ว่า ในกรณีที่แผนแบบการทดลองเป็นแบบสมดุลย์ $M\hat{S}E^*_{CY}$ น่าจะเป็นตัวประมาณของ $MSE(\tilde{\mu})$ ดีกว่า เมื่อ t มีค่าน้อยหรือ ρ มีค่ามาก ทั้งนี้จะต้องระลึกไว้เสมอว่า $M\hat{S}E_N$ ไม่มีความเอียงเฉ แต่ $M\hat{S}E^*_{CY}$ มีความเอียงเฉ และความเอียงเฉของ $M\hat{S}E^*_{CY}$ นั้น มีค่ามาก ๆ ในหลาย ๆ กรณี

ถึงแม้นว่าการพิจารณาดังกล่าวข้างต้น เรากระทำภายใต้ข้อสมมุติว่า ขนาดตัวอย่างบูทสแทรป $(NB) = \infty$ และ $\hat{\sigma}^2_a = S^2_a$ (ไม่มีการตัดค่าที่ศูนย์) แต่เมื่อศึกษาในกรณีที่ $NB = 200$ และจำกัดค่า $\hat{\sigma}^2_a$ ให้มีค่าเป็นบวกอย่างเดียว (ดูสมการ 14) แล้วผลที่ปรากฏออกมาก็มิได้แตกต่างไปจากข้อสรุปข้างต้นมากนัก กล่าวคือ $M\hat{S}E_N$ และ $M\hat{S}E^*_{CL}$ ได้ผลคล้ายคลึงกัน ในกรณีที่ t มีค่ามาก ๆ (หรือ n มีค่าน้อยกว่าเช่นกรณีที่ $t = 17$ และ $n = 4$) เป็นต้น เมื่อ ρ มีค่าน้อย (=.10) $M\hat{S}E_N$ เป็นตัวประมาณที่ดีกว่าอย่างเห็นได้ชัด ในกรณีที่ t มีค่าน้อย ถ้า ρ มีค่ามาก เช่น $\rho = .45$ พบว่า $M\hat{S}E^*_{CY}$ มีคุณสมบัติที่ดีกว่า ส่วนในกรณีอื่น ๆ ที่ไม่ได้กล่าวถึงนั้น เนื่องจากไม่อาจหาข้อสรุปที่แน่ชัดได้ ทั้งนี้เพราะในหลาย ๆ กรณีพบว่าตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{CY}$ มีความแปรปรวนต่ำกว่า แต่มีค่าความเอียงเฉมากจนไม่อาจละเลยได้ (ดูตาราง 3) การสรุปขึ้นอยู่กับหลักเกณฑ์ที่ได้ใช้พิจารณาหรือต้องอาศัยเงื่อนไขเพิ่มเติม

11. แผนแบบอสมดุลย์ (Unbalanced Designs)

แผนแบบที่พิจารณาในกรณีอสมดุลย์คือ แผนแบบของ Bliss(D_{BLS}) ดังกล่าวในหัวข้อ 6 นั่นคือ แผนแบบที่มี $t = 17$ และ $n_1 = n_2 = n_3 = 2, n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = 3, n_{10} = n_{10} = n_{12} = n_{13} = 4, = n_{14} = n_{15} = 6, = n_{16} = 8$ และ $n_{17} = 9$

ตารางที่ 3 ความเอียงเฉลี่ยสัมพัทธ์ *RMSE* สัมพันธ์ และค่าเฉลี่ยของค่าสัมบูรณ์ ของลอกการิทึมของอัตราส่วน (*MALR*)

Design : Dist	ρ		17 × 4			7 × 10		
			$M\hat{S}E_N$	$M\hat{S}E^*_{CL}$	$M\hat{S}E^*_{CY}$	$M\hat{S}E_N$	$M\hat{S}E^*_{CL}$	$M\hat{S}E^*_{CY}$
NORM	.10	Rel BIAS	.044	.046	.473	.016	.018	.278
		Rel RMSE	.343	.347	.613	.564	.565	.599
		MALR	.245	.259	.381	.439	.435	.338
	.45	Rel BIAS	.028	.033	.150	-.000	.010	-.036
		Rel RMSE	.394	.405	.429	.581	.606	.533
		MALR	.306	.314	.285	.505	.507	.462
	.90	Rel BIAS	.037	.025	-.014	.011	.011	-.125
		Rel RMSE	.403	.421	.395	.580	.587	.516
		MALR	.313	.330	.329	.504	.511	.539
ABN	.10	Rel BIAS	.039	.043	.472	.044	.037	.290
		Rel RMSE	.343	.361	.636	.616	.603	.644
		MALR	.254	.270	.369	.469	.474	.367
	.45	Rel BIAS	.015	.034	.141	.016	.030	-.021
		Rel RMSE	.421	.464	.461	.765	.794	.674
		MALR	.352	.370	.313	.635	.639	.560
	.90	Rel BIAS	.024	.030	-.014	.022	.014	-.121
		Rel RMSE	.495	.517	.483	.824	.831	.723
		MALR	.409	.420	.409	.679	.689	.717
TUK	.10	Rel BIAS	.081	.073	.503	.052	.053	.312
		Rel RMSE	.450	.443	.774	.824	.829	.867
		MALR	.342	.347	.432	.529	.543	.420
	.45	Rel BIAS	.091	.097	.200	.031	.043	-.014
		Rel RMSE	.643	.660	.660	1.130	1.175	1.012
		MALR	.482	.499	.426	.702	.703	.629
	.90	Rel BIAS	.107	.121	.072	.044	.039	-.099
		Rel RMSE	.777	.794	.740	1.222	1.280	1.103
		MALR	.563	.571	.560	.741	.750	.798
T(5)	.10	Rel BIAS	.047	.063	.483	.029	.031	.285
		Rel RMSE	.450	.482	.735	.685	.710	.738
		MALR	.292	..305	.395	.475	.485	.381
	.45	Rel BIAS	.024	.011	.134	-.020	-.016	-.060
		Rel RMSE	.465	.469	.481	.917	.882	.755
		MALR	.360	.364	.325	.641	.648	.578
	.90	Rel BIAS	.025	.022	-.020	-.015	-.021	-.151
		Rel RMSE	.519	.523	.492	.974	.942	.823
		MALR	.395	.406	.403	.675	.679	.721
PSN	.10	Rel BIAS	-.021	-.031	.377	-.687	-.037	.202
		Rel RMSE	.381	.386	.591	.799	.823	.747
		MALR	.290	.298	.338	.490	.497	.368
	.45	Rel BIAS	-.089	-.083	.045	-.036	-.036	-.082
		Rel RMSE	.467	.488	.469	1.114	1.110	.963
		MALR	.443	.454	.349	.697	.704	.626
	.90	Rel BIAS	-.081	-.073	-.108	-.013	-.022	-.153
		Rel RMSE	.525	.551	.522	1.177	1.179	1.021
		MALR	.488	.506	.504	.726	.721	.771

อีกแบบแผนหนึ่งคือ แผนแบบที่มี $t=7$ และ $n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=5$ และ $n_{17}=9$ $n_7=40$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย D_{40} แผนแบบทั้งสองนี้มีจำนวนค่าสังเกต หรือหน่วยทดลองทั้งสิ้น (N) ประมาณเท่า ๆ กัน (D_{BLS} มี $N=69$ และ D_{40} มี $N=70$) แต่ D_{BLS} เป็นตัวแทนของตัวแบบที่มีจำนวนกลุ่มมาก ($t=17$) และ D_{40} เป็นตัวแทนของตัวแบบที่มีน้อยกลุ่มกว่า ($t=7$) นอกจากนี้ความแตกต่างระหว่างแผนแบบทั้งสองที่อาจพิจารณาเห็นได้คือความอสมดุลย์ กล่าวคือ แผนแบบ D_{40} มีความสมดุลย์มากกว่าแผนแบบ D_{BLS}

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบค่าประมาณทั้ง 6 (ดูหัวข้อ 9) ของ $MSE(\tilde{\mu})$ เราจำลองตัวแบบเชิงเส้นที่มีการแจกแจง 5 ชนิด (ดูตาราง 1) โดยที่ ρ มีค่าต่าง ๆ 3 ค่า คือ .10, .45 และ .90 เพื่อแทนกรณีที่ ρ มีค่าน้อย ปานกลาง และมากตามลำดับ ในแต่ละสถานการณ์จะทำการผลิต (generate) ตัวอย่างตามแผนแบบข้างต้น กรณีละ 200 ตัวอย่าง และในแต่ละตัวอย่างจะสุ่มตัวอย่างบูทสแทรป 200 ตัวอย่าง เพื่อคำนวณหาตัวประมาณบูทสแทรป ดังนั้นในแต่ละกรณีค่าประมาณแต่ละตัวจะมีจำนวน 200 ค่า ซึ่งทำให้เราสามารถคำนวณหาความแปรปรวน (โดยประมาณ) ของตัวประมาณต่าง ๆ เหล่านั้นได้ การเปรียบเทียบค่าประมาณทั้ง 6 นั้น คำนึงถึงทั้งประสิทธิภาพ (efficiency) และความแม่นยำ (precision) ของตัวประมาณนั้น ๆ ดังนั้น จึงควรพิจารณาค่าต่าง ๆ ด้

ต่อไปนี้

สมมุติว่า $M\hat{S}E$ เป็นตัวประมาณของ $MSE = MSE(\tilde{\mu})$ และโดยการจำลองดังกล่าวข้างต้น จะได้ค่าประมาณของ $M\hat{S}E$ จำนวน 200 ค่า คือ $M\hat{S}E_1, \ldots, M\hat{S}E_{200}$

$$(1)\quad MALR = \frac{1}{200}\sum_{1}^{200}\left|\ell n\left(\frac{M\hat{S}E_i}{MSE}\right)\right|$$

$$(2)\quad Rel\ RMSE = \frac{\left[\frac{1}{200}\sum_{1}^{200}(M\hat{S}E_i - MSE)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{MSE}$$

$$= \left[\frac{1}{200} \sum_{1}^{200} \left(\frac{M\hat{S}E_i}{MSE} - 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(3) $$Rel\ BIAS = \frac{\overline{MSE} - MSE}{MSE} = \frac{1}{200} \sum_{1}^{200} \left(\frac{M\hat{S}E_i}{MSE} \right) - 1$$

โดยที่ $$\overline{MSE} = \frac{1}{200} \sum_{1}^{200} M\hat{S}E_i$$

ค่าวัดประสิทธิภาพและความแม่นยำของตัวประมาณทั้งสองคือ *MALR* และ *RMSE* เป็นค่าวัดที่มีคุณสมบัติที่ดีต่างกัน *MALR* ถือว่าความคลาดเคลื่อนของตัวประมาณ $M\hat{S}E_1$ ที่มีอัตราส่วน $\frac{M\hat{S}E_1}{MSE} = 2$ สมนัย (equivalent) กับความคลาดเคลื่อนของตัวประมาณ $M\hat{S}E_2$ ที่มีอัตราส่วน $\frac{M\hat{S}E_1}{MSE} = \frac{1}{2}$ ในขณะที่ *RMSE* ถือว่า $M\hat{S}E_1$ มีความคลาดเคลื่อนมากกว่า $M\hat{S}E_2$ แต่ถ้าพิจารณาความคลาดเคลื่อนของ $M\hat{S}E_3$ และ $M\hat{S}E_4$ ที่มีอัตราส่วนดังนี้คือ $\frac{M\hat{S}E_3}{MSE} = 1.9$ และ $\frac{M\hat{S}E_4}{MSE} = 0.1$ กรณีเช่นนี้ถ้าใช้ Rel *RMSE* ตัดสิน จะสรุปได้ว่า $M\hat{S}E_3$ และ $M\hat{S}E_4$ มีความคลาดเคลื่อนสมนัยกัน แต่ถ้าใช้ *MALR* เป็นเกณฑ์ที่จะพบว่า $M\hat{S}E_4$ มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่า $M\hat{S}E_3$ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ การประมาณต่ำกว่าระดับ (under-estimation) มีอิทธิพลต่อ *MALR* มากกว่าการประมาณสูงกว่าระดับ (Over-estimation) และการประมาณสูงกว่าระดับมีอิทธิพลต่อ Rel *RMSE* มากกว่าการประมาณต่ำกว่าระดับ โดยทั่ว ๆ ไปเราคิดว่า *MALR* (M ย่อมาจาก mean หรือ median และ ALR ย่อมาจาก absolute log ratio) เป็นค่าวัดที่ดีกว่า แต่อาจแปลความหมาย (interpret) ได้ไม่ง่ายเท่า Rel *RMSE* เนื่องจากอยู่ในรูปของฟังก์ชั่นลอกการิทึม

ตาราง 4 แสดงค่าประมาณของ *MALR*, Rel *RMSE* และ Rel *BIAS* ของตัวประมาณทั้ง 6 เมื่อ $\rho = .10$, $.45$ และ $.90$ ค่าเหล่านี้ได้จากการจำลอง 200 ตัวอย่าง และค่าประมาณบูทสแทรปของแต่ละตัวอย่าง คำนวณจากตัวอย่างบูทสแทรปจำนวน 200 ตัวอย่าง

เมื่อใช้ *MALR* เป็นเกณฑ์ในการพิจารณา พบว่าทั้ง 10 สถานการณ์ที่ศึกษา (5 การแจกแจง × 2 แผนแบบ) เมื่อ $\rho = .10$ ตัวประมาณ $M\hat{S}E_{KH}$ ให้ค่า *MALR* ต่ำที่สุด และเมื่อ $\rho = .45$ ตัวประมาณ $M\hat{S}E^{*}_{CY}$ ให้ค่า *MALR* ต่ำที่สุด นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อใช้การทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ชนิด Wilcoxon's signed-rank test ในกรณีที่ $\rho = .10$ นั้น มัธยฐาน (Med) ของ $M\hat{S}E_{KH}$ แตกต่างจากมัธยฐานของตัวประมาณอื่น ๆ อย่างมีนัยสำคัญ (5%) และในกรณีที่ $\rho = .45$ นั้น มัธยฐานของ $M\hat{S}E^{*}_{CY}$ ก็แตกต่างจากมัธยฐานของตัวประมาณอื่น ๆ ที่ระดับนัยสำคัญ 5% เช่นเดียวกัน สำหรับกรณีที่ $\rho = .90$ ตัวประมาณ $M\hat{S}E^{*}_{CY}$ ให้ค่า *MALR* ต่ำสุด 8 ใน 10 สถานการณ์ ส่วนอีก 2 สถานการณ์นั้น ได้มาจากตัวประมาณ $M\hat{S}E^{*}_{QL}$ อย่างไรก็ตาม เมื่อทดสอบเปรียบเทียบระหว่างมัธยฐานของตัวประมาณคู่ต่าง ๆ แล้ว พบว่าในเกือบทุกสถานการณ์ Med ($M\hat{S}E^{*}_{CY}$) และ Med ($M\hat{S}E^{*}_{QL}$) ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 5% และยังไม่แตกต่างจากมัธยฐานของตัวประมาณอื่น ๆ อีกด้วย

เมื่อเปลี่ยนมาพิจารณา Rel *RMSE* เกณฑ์ พบว่าเมื่อ $\rho = .10$ ตัวประมาณ $M\hat{S}E_{KH}$ ยังเป็นตัวประมาณที่ดีที่สุด เพราะให้ค่า Rel *RMSE* ต่ำที่สุดใน 9 สถานการณ์จากสถานการณ์ทั้งหมด 10 สถานการณ์ แต่เมื่อ $\rho = .45$ และ $.90$ ตัวประมาณที่ให้ค่า Rel *RMSE* ต่ำสุดคือ $M\hat{S}E^{*}_{CY}$ หรือ $M\hat{S}E^{*}_{QL}$ ในกรณีที่แผนแบบการทดลองมีลักษณะอสมดุลย์มากดังเช่นแผนแบบ $D_{40} = (6 \times 5 + 1 \times 40)$ นั้น

ตารางที่ 4 Relative BIAS, relative RMSE and MALR ov MSE (μ)

(a) Design : 6 x 5 + 1 x 40

Dist	ρ		Naive	K & H	C - L	Q - L	C - Y	Q - Y
NORM	.10	Rel BIAS	-.051	0.225	-.002	0.010	0.530	-.152
		Rel RMSE	0.610	0.513	0.608	0.606	0.762	0.731
		MALR	0.555	0.267	0.510	0.508	0.433	1.419
	.45	Rel BIAS	-.015	-.007	-.015	-.005	0.002	-.013
		Rel RMSE	0.685	0.678	0.693	0.681	0.507	0.688
		MALR	0.535	0.507	0.521	0.520	0.412	0.621
	.90	Rel BIAS	-.030	-.030	-.034	-.029	-.147	-.029
		Rel RMSE	0.727	0.727	0.761	0.727	0.528	0.727
		MALR	0.545	0.545	0.558	0.545	0.531	0.545
ABN	.10	Rel BIAS	-.100	0.224	-.048	-.038	0.550	-.201
		Rel RMSE	0.593	0.509	0.562	0.579	0.815	0.732
		MALR	0.572	0.289	0.509	0.509	0.456	1.622
	.45	Rel BIAS	-.106	-.085	-.095	-.096	-.032	-.112
		Rel RMSE	0.681	0.660	0.681	0.676	0.573	0.693
		MALR	0.671	0.587	0.656	0.648	0.486	0.910
	.90	Rel BIAS	-.105	-.104	-.112	-.104	-.185	-.104
		Rel RMSE	0.764	0.764	0.743	0.764	0.626	0.764
		MALR	0.733	0.733	0.718	0.732	0.681	0.733
TUK	.10	Rel BIAS	-.020	0.282	0.033	0.047	0.677	-.053
		Rel RMSE	0.734	0.702	0.708	0.732	1.098	0.860
		MALR	0.616	0.353	0.549	0.554	0.543	1.345
	.45	Rel BIAS	-.033	-.014	-.016	-.023	0.052	-.031
		Rel RMSE	0.899	0.885	0.922	0.893	0.825	0.902
		MALR	0.745	0.673	0.717	0.717	0.563	0.906
	.90	Rel BIAS	-.053	-.053	-.070	-.053	-.133	-.053
		Rel RMSE	0.969	0.969	0.962	0.969	0.893	0.969
		MALR	0.801	0.799	0.803	0.799	0.789	0.800
T(5)	.10	Rel BIAS	0.007	0.291	0.068	0.070	0.657	-.064
		Rel RMSE	1.115	1.079	1.100	1.114	1.406	1.212
		MALR	0.567	0.325	0.512	0.514	0.480	1.534
	.45	Rel BIAS	0.087	0.098	0.112	0.099	0.181	0.091
		Rel RMSE	2.067	2.064	2.189	2.060	2.471	2.069
		MALR	0.648	0.610	0.632	0.625	0.497	0.713
	.90	Rel BIAS	0.095	0.095	0.078	0.096	0.031	0.096
		Rel RMSE	2.442	2.442	2.468	2.442	2.729	2.442
		MALR	0.713	0.713	0.719	0.712	0.686	0.713
PSN	.10	Rel BIAS	-.093	0.197	-.045	-.032	0.506	-.171
		Rel RMSE	0.693	0.632	0.677	0.687	0.844	0.811
		MALR	0.585	0.321	0.522	0.518	0.438	1.595
	.45	Rel BIAS	-.066	-.049	-.046	-.055	-.034	-.070
		Rel RMSE	1.008	0.997	1.036	1.007	0.714	1.012
		MALR	0.735	0.665	0.718	0.711	0.534	0.883
	.90	Rel BIAS	-.041	-.041	-.025	-.040	-.147	-.040
		Rel RMSE	1.128	1.127	1.1245	1.127	0.834	1.128
		MALR	0.815	0.815	0.829	0.814	0.798	0.814

ตารางที่ 4 (ต่อ)

Dist	ρ		Naive	K & H	C - L	Q - L	C - Y	Q - Y
NORM	.10	Rel BIAS	-.004	0.020	0.006	0.006	0.614	-.054
		Rel RMSE	0.310	0.303	0.316	0.311	0.738	0.339
		MALR	0.247	0.231	0.252	0.244	0.459	0.296
	.45	Rel BIAS	-.053	-.051	-.042	-.050	0.133	-.054
		Rel RMSE	0.335	0.334	0.369	0.334	0.377	0.338
		MALR	0.298	0.296	0.323	0.297	0.256	0.303
	.90	Rel BIAS	-.052	-.052	-.045	-.052	-.068	-.052
		Rel RMSE	0.352	0.352	0.380	0.351	0.366	0.352
		MALR	0.316	0.316	0.336	0.316	0.314	0.316
ABN	.10	Rel BIAS	0.055	0.075	0.073	0.064	0.702	0.011
		Rel RMSE	0.370	0.369	0.400	0.372	0.862	0.386
		MALR	0.262	0.253	0.271	0.261	0.504	0.296
	.45	Rel BIAS	-.020	-.018	-.017	-.017	0.146	-.023
		Rel RMSE	0.434	0.433	0.443	0.434	0.434	0.438
		MALR	0.370	0.367	0.364	0.368	0.290	0.378
	.90	Rel BIAS	-.057	-.057	-.049	-.056	-.074	-.057
		Rel RMSE	0.476	0.476	0.490	0.475	0.445	0.476
		MALR	0.438	0.438	0.451	0.438	0.430	0.438
TUK	.10	Rel BIAS	0.000	0.025	0.008i	0.013	0.633	-.044
		Rel RMSE	0.423	0.424	0.417	0.425	0.907	0.434
		MALR	0.346	0.334	0.339	0.342	0.478	0.384
	.45	Rel BIAS	-.047	-.044	-.050	-.044	0.135	-.050
		Rel RMSE	0.536	0.535	0.551	0.533	0.576	0.538
		MALR	0.475	0.470	0.480	0.469	0.366	0.479
	.90	Rel BIAS	-.047	-.047	-.040	-.047	-.037	-.047
		Rel RMSE	0.630	0.630	0.659	0.630	0.668	0.630
		MALR	0.543	0.543	0.549	0.543	0.548	0.543
T(5)	.10	Rel BIAS	0.001	0.025	0.024	0.013	0.636	-.039
		Rel RMSE	0.503	0.503	0.567	0.510	0.994	0.511
		MALR	0.315	0.298	0.320	0.310	0.449	0.364
	.45	Rel BIAS	-.058	-.055	-.056	-.054	0.123	-.060
		Rel RMSE	0.473	0.471	0.497	0.470	0.502	0.474
		MALR	0.388	0.384	0.402	0.383	0.301	0.393
	.90	Rel BIAS	-.055	-.055	-.066	-.055	-.103	-.055
		Rel RMSE	0.527	0.527	0.540	0.527	0.443	0.527
		MALR	0.435	0.435	0.441	0.435	0.419	0.436
PSN	.10	Rel BIAS	-.008	0.013	-.004	0.003	0.621	-.045
		Rel RMSE	0.422	0.418	0.422	0.424	0.904	0.442
		MALR	0.322	0.306	0.334	0.316	0.451	0.364
	.45	Rel BIAS	-.012	-.010	-.011	-.010	0.146	-.013
		Rel RMSE	0.593	0.592	0.606	0.591	0.593	0.595
		MALR	0.437	0.434	0.434	0.434	0.356	0.440
	.90	Rel BIAS	-.009	-.009	-.005	-.009	-.031	-.009
		Rel RMSE	0.686	0.686	0.735	0.686	0.678	0.687
		MALR	0.504	0.504	0.519	0.504	0.513	0.504

ตัวประมาณที่ดีที่สุดสำหรับเกือบทุกการแจกแจง เมื่อ $\rho = .45$ หรือ .90 คือ $M\hat{S}E^*_{CY}$ แต่ถ้าแผนแบบมีลักษณะอสมดุลย์น้อย หรือเกือบสมดุลย์ พบว่า เมื่อ $\rho =$ .45 ตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{QL}$ เป็นตัวประมาณที่ดีที่สุดในเกือบทุกการแจกแจง

สิ่งที่น่าสังเกตอย่างหนึ่งคือ ในกรณีที่ $\rho = .45$ เมื่อใช้ *MALR* เป็นเกณฑ์การพิจารณา พบว่า $M\hat{S}E^*_{CY}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เลวนัก คือมี *MALR* น้อยเป็นอันดับที่ 2 รองจาก $M\hat{S}E_{KH}$ แต่เมื่อเปลี่ยนมาใช้ Rel *RMSE* เป็นเกณฑ์ Rel *RMSE* ($M\hat{S}E^*_{CY}$) มีค่าสูงที่สุดในบรรดาตัวประมาณทั้ง 6 ที่เราศึกษา ซึ่งแสดงว่า $M\hat{S}E^*_{CY}$ เป็นตัวประมาณสูงกว่าระดับ เมื่อมีค่าน้อย ๆ เช่น $\rho = .10$ หลักฐานอีกประการหนึ่งซึ่งสนับสนุนข้อสรุปนี้คือ เมื่อศึกษาตารางแจกแจงความถี่ของค่าประมาณ 200 ค่า ซึ่งได้จากการจำลอง 200 ตัวอย่าง พบว่า สำหรับกรณีที่ $\rho = .10$ ค่าประมาณของ $M\hat{S}E^*_{CY}$ ที่สูงกว่า $MSE(\hat{\mu})$ เป็นจำนวน 76-93%

Rel *BIAS* มีความสำคัญน้อยมากเมื่อเทียบกับ *MALR* และ Rel *RMSE* แต่มีข้อสังเกตที่น่าสนใจ 2 ข้อ ที่ควรกล่าวไว้ในที่นี้ ข้อแรกคือ Rel *BIAS* ($M\hat{S}E^*_{CY}$) มีค่าสูงมากในหลาย ๆ กรณีโดยเฉพาะ เมื่อ $\rho = .10$ ข้อที่สองคือ Rel *BIAS* ($M\hat{S}E_{KH}$) มีค่าสูงพอสมควร ถึงแม้นจะน้อยกว่า Rel *BIAS* ($M\hat{S}E^*_{CY}$) แต่ข้อนี้เป็นกรณีที่เราไม่ได้คาดคิดมาก่อน

12. ข้อสรุป

การใช้ตัวประมาณบูทสแทรปสำหรับตัวแบบเชิงสถิติเช่นนี้มีข้อควรระวังคือ เมื่อใช้วิธี Y-method สำหรับกรณีที่ ρ มีค่าน้อย ($\rho = .10$) ตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{CY}$ และ $M\hat{S}E^*_{QY}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่ค่อยจะดีนัก โดยเฉพาะเมื่อแผนแบบการทดลองมีความอสมดุลย์สูง จำนวนค่าประมาณ $M\hat{S}E^*_{QY}$ ที่สูงกว่า 2 เท่าหรือต่ำกว่า $\frac{1}{2}$ เท่าของค่า

ที่แท้จริง $MSE(\tilde{\mu})$ ในกรณีของตัวแบบ Bliss มีถึง 26-29% อย่างไรก็ตามเมื่อ ρ มีค่าสูงขึ้น เช่นในกรณีศึกษาคือ $\rho = .45$ หรือ .90 ตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{CY}$ แสดงคุณสมบัติที่ดี และน่าสนใจหลายประการ เช่น ให้ค่า *MALR* และ Rel *BIAS* ต่ำ มีเปอร์เซ็นต์ของค่าประมาณที่อยู่ระหว่าง $\frac{10}{11}$ และ $\frac{11}{10}$ เท่าของค่าที่แท้จริง ในระดับสูง และเปอร์เซ็นต์ของค่าประมาณที่สูงกว่า 2 เท่า หรือต่ำกว่า $\frac{1}{2}$ ของค่าที่แท้จริง ในระดับต่ำ และข้อสำคัญคือ $M\hat{S}E^*_{CY}$ มี robustness นั่นคือ ตัวแบบไม่จำเป็นต้องเป็นตัวแบบผลรวมและประชากรไม่จำเป็นต้องมีการแจกแจงแบบปกติ

จากการศึกษาพบว่า ในหลาย ๆ สถานการณ์ $M\hat{S}E_{KH}$ เป็นตัวประมาณที่ดีของ $MSE(\tilde{\mu})$ จากบรรดาตัวประมาณทั้ง 6 ตัวที่ศึกษาภายใต้เกณฑ์เกือบทั้งหมดที่ใช้พิจารณา ยกเว้นแต่ว่า Rel *BIAS* $(M\hat{S}E_{KH})$ มีค่าสูง อีกทั้งการประมาณค่า $M\hat{S}E_{KH}$ กระทำภายใต้ข้อสมมุติว่า Y มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นในกรณีทั่วไปอาจพิจารณาว่า $M\hat{S}E_{KH}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เหมาะสมเนื่องจากข้อสมมุติไม่ถูกต้อง ผู้ศึกษาจึงขอเสนอทางเลือกที่เป็นไปได้คือ พิจารณาใช้ตัวประมาณ $M\hat{S}E^*_{QL}$ ถึงแม้นว่า เมื่อ $\rho = .10$ ตัวประมาณที่ไม่ได้ให้ค่า *MALR* หรือ Rel *RMSE* ต่ำสุด แต่ค่าหรือเกณฑ์เหล่านั้นก็ไม่ได้สูงไปจากค่าที่ได้จาก $M\hat{S}E_{KH}$ มากนัก นอกจากนี้ $M\hat{S}E^*_{QL}$ ยังให้ค่า Rel *BIAS* ต่ำ และมีจำนวนค่าประมาณที่ดี (อยู่ระหว่าง $\frac{10}{11}$ และ $\frac{11}{10}$ เท่าของค่าที่แท้จริง) ในระดับเปอร์เซ็นต์ที่สูง และจำนวนค่าประมาณที่ไม่ดี (สูงกว่า 2 เท่า หรือต่ำกว่า $\frac{1}{2}$ เท่าของค่าที่แท้จริง) ในระดับเปอร์เซ็นต์ที่ต่ำ เมื่อเทียบกับตัวประมาณอื่น ๆ และยังไม่มีปัญหาตัวประมาณสูงหรือต่ำกว่าระดับมากนัก

ในการศึกษาครั้งนี้ สิ่งที่มีอิทธิพลต่อตัวประมาณซึ่งเห็นได้ชัดเจนคือ แผนแบบ (design) และค่าของ ρ (intra-block correlation coefficient) แต่อิทธิพลของการแจกแจงของผลเชิงสุ่มไม่ได้แสดงออกมาโดยชัดเจน

เข้าใจว่าผลของแผนแบบสืบเนื่องมาจาก t (จำนวนกลุ่ม) มากกว่าที่จะมาจาก $\frac{N}{t}$ (ขนาดของกลุ่มโดยเฉลี่ย) อาจสังเกตได้ว่าผลที่ได้แบ่งเป็น 2 พวกคือ พวกที่ 1 ประกอบด้วยแผนแบบสมดุลย์ $t \times n = 7 \times 10$ และแผนแบบอสมดุลย์ $D_{40} = (6 \times 5 + 1 \times 40)$ พวกที่ 2 ประกอบด้วยแผนแบบสมดุลย์ $t \times n = 17 \times 4$ และแผนแบบอสมดุลย์ของ Bliss จะเห็นว่ามีจำนวนค่าสังเกตรวม N ใกล้เคียงกันในทุกกรณี $(68 < N \leq 70)$ แต่พวกที่ 1 มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ 7 และพวกที่ 2 มี 17 กลุ่ม อย่างไรก็ตามการศึกษาครั้งนี้เป็นเพียงส่วนน้อย การสรุปผลที่แน่นอนจำเป็นต้องอาศัยการศึกษาที่ละเอียดและลึกซึ้งกว่านี้

เอกสารอ้างอิง

Bliss, C.I. (1967), Statistics in Biology, Vol.1, McGraw-Hill Book Company, New Your.

Birkes, D.S., Seely, J.F. and Azzam, A.M. (1981), "An Efficient Estimator of the Mean in a Two-stage Nested Model," Technometrics, 23, 143-148.

Cochran, W.G. (1977), SamplingTechniques, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Divid, P.I. and Sukhatme, B.V. (1974), "On the Bias and Mean Squared Error of the Ratio Estimator," Journal of American Statistical Association, 69, 464-466.

Divison, A.C., Hinkley, D.V. and Schechtman, E. (1986), "Efficient Bootstrap Simulation," Biometrika, 73, 55-566.

Efron, B. (1979), Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife," Journal of American Statistical Association, 7, 111-126.

Efron, B. (1982), "The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans," SIAM Review, 38.

Efron, B. (1983), "Comparing Non-nested Linear Models", Technical Report No. 197, Stanford University, Department of Statistics.

Elderton, W.P. and Johnson, N.L. (1969), System of Frequency Curves, Cambridge University Press, London.

Fertig, K.W. and Mann, N.R. (1974), "Population Percentile Estimation for the Unbalanced Random-effect Model : Estimation of the Strength of a material when Sampling from Various Batches of the Material," Keliability and Biometry, 205-228, SIAM, Philadelphia.

Freedman, D.A. and Peters, S.C. (1984), "Bootstrapping a Regression Equation : Some Empirical Results," Journal of American Statistical Association, 79, 97-106.

Golder, E.R. and Settle, J.G. (1976), "The Box-Miiller Method for Generating Pseudo-random Normal Deviates," Applied Statistics, 25, 12-20.

Hall, P. (1986), "On the Number of Bootstrap Simulations Required to Construct a Confidence Interval," The Annals of Statistics, 14, 1453-1462.

Hastings, N.A.J. and Peacock, J.B. (1975), Statistical Distributions : A handbook for Students and Practitioners, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Henderson, C.R. (1953), "Estimation of Variance and Covariance Components," Biometrics, 9, 226-252.

Harville, D.A. (1976), "Extension of the Gauss-Markov Theorem to Include the Estimation of Random Effects," The Annals of Statistics, 4, 384-395.

Harville, D.A. (1981), "Unbiased and Minimum-variance Unbiased Estimable Functions for Fixed Linear Models with Arbitrary Covariance Structure," The Annals of Statistics, 9, 633-637.

Jonson, N.L. and Kotz, S. (1970), Continuous Univariate Distribution-2, Houghton Mufflin Company, Boston.

Kackar, R.N. and Harville, D.A. (1981), "Unbiasedness of Two-stage Estimation and Prediction Procedures for Mixed Linear Models," Communication in Statistics - Theory and Methods, Ser. A, 10, 1249-1261.

Kackar, R.N. and Harville, D.A. (1984), "Approximation for Standard Errors of Estimators of Fixed and Random Effects in the Mixed Linear Models," Journal of American Statistical Association, 79, 853-862.

Kinderman, A.J. and Monahan, J.F. (1977), "Computer Generation of Random Variates Using the Ratio of Uniform Deviates," ACM Transactions on Mathematical Software, 3, 257-260.

Law, A.M. and Kelton, W.D. (1982), Simulation Modelling and Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

Lee, Y. (1985), "Bootstrap Variance Estimator for Fixed Effects in Mixed Linear Model," unpublished manuscript.

Lewis, P.A.W., Goodman, A.S. and Miller, J.M. (1969), "A Pseude-random Number Genertor for the System/360," IBM System Journal, 8, 136-146.

Marsaglia, G. and Bray, T.A. (1964) "A Convenient Mathod for Generating Normal Variable," SIAM Review, 6, 260-264.

Pierce, D.A. (1982), "The Asymptotic Effect of Substituting Estimators for Parameters in Certain Types of Statistics," The Annals of Statistics, 10, 475-478.

Rao, C.R. (1973), Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Saleh, A. (1987), "Nonlinear Unbiased Estimators that Dominate the Intra-block Estimator," unpublished Ph.D. thesis, Oregon State University, Department of Statistics.

Searle, S.R. (1971), Linear Models, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Searle, S.R. (1974), "Prediction, Mixed Models, and Variance Components," Reliability and Biometry, 229-266, SIAM, Philadelphia.

Snedecor, G.W. and Cochran, W.G. (1980), Statistical Methods, Seventh edition, The Iowa University Press, Ames.

Steel, R.G.D. and Torrie, J.H. (1980), Principles and Procedures of Statistics : A Biometrical Approach, Second edition, McGraw-Hill Book Company, New York.

Swallow, W.H. and Monahan, J.F. (1984), "Monte Carlo Comparison of ANOVA, MIVQUE, REML, and ML Estimators of Variance Components," Technometrics, 26, 447-57.

Therneau, T.M. (1983), "Variance Reduction Techniques for the Bootstrap," unpublished Ph.D. thesis, Stanford University, Department of Statistics.