การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม

บรรทม สุระพร*

1. บทนำ (Introduction)

ในการพิจารณา probability density function ของตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ เราให้พารามิเตอร์ $\theta \in \Omega$ ซึ่งเราเรียกปริภูมิพารามิเตอร์ (The parameter space) และเราให้ $P = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ ว่าเป็น class ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ที่มี θ ต่าง ๆ กัน

เราสนใจที่จะทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงนั้น เราสามารถที่จะแบ่ง P ออกเป็น 2 ส่วนคือให้เป็นเซ็ต H ประกอบด้วยพารามิเตอร์จำนวนหนึ่ง เขียนแทนด้วย $\theta \in \Omega_H$ เราเรียกสมมติฐานนี้ว่าสมมติฐานเพื่อการทดสอบ (Null hypothesis) และเซ็ต K ประกอบด้วยพารามิเตอร์อีกจำนวนหนึ่งที่แตกต่างจากเซ็ต H โดยสิ้นเชิง เขียนแทนด้วย $\theta \in \Omega_K$ และเรียกสมมติฐานนี้ว่าสมมติฐานแย้ง (Alternative hypothesis) โดยที่เซ็ตที่เราแบ่ง P ออกเป็นเซ็ต H และ K นั้น $H \cup K = \Omega$ และ $H \cap K = \phi$ เสมอ

เมื่อเราแบ่ง P ออกเป็น 2 ส่วน คือ H และ K ตามที่เราสนใจจะทดสอบสมมติฐานแล้วเราจึงเก็บรวบรวมข้อมูล (Observations) และโดยอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างที่สุ่มได้ เราพิจารณาว่าข้อมูลจากตัวอย่างสุ่มแสดงให้เห็นหรือไม่ว่าสมมติฐานที่จะพิจารณานั้นพอเป็นไปได้หรือมีความน่าจะเป็นที่เป็นตาม H สูงพอ หากความน่าจะเป็นดังกล่าวสูงพอเราจะยอมรับ(Accept) H ว่าเป็นจริง หากว่าไม่สูงพอเราก็ปฏิเสธ (Reject) H กล่าวคือพารามิเตอร์เป็นไปตามเซ็ต K นั่นเอง ในการทดสอบสมมติฐานนั้น เราจำเป็นต้องให้ความสำคัญกับตัวแบบทดสอบ เพราะหากเราใช้ตัวแบบทดสอบที่ไม่เหมาะสมกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ อาจทำให้เราตัดสินใจผิดพลาดไปจากที่ควรจะเป็นได้

ในกรณีเฉพาะเราสนใจการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบทวินาม เราให้ X เป็นจำนวนการเกิดสำเร็จ (Success) ในการทดลองแบบเบอร์นูลีที่เป็นอิสระกัน จำนวน n

---

* อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี, นักศึกษาปริญญาเอก สาขาสถิติ คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

ครั้ง และในการทดลองแต่ละครั้งความน่าจะเป็นที่จะสำเร็จ θ มีค่าคงที่ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability mass function) ของ θ เป็น P_θ และมีฟอร์ม ดังนี้

$$P_\theta(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad ,x = 0,1,2,3,4,\ldots,n$$

และเรามีค่าคาดหวัง (Expectation) ของ X คือ $n\theta$ ความแปรปรวนของ X คือ $n\theta(1-\theta)$ และโมเมนต์เวียนบังเกิดเป็น $[(1-\theta)+\theta e^t]^n$

สมมติฐานที่เราจะทดสอบที่น่าสนใจ มีดังนี้

1. $H : \theta = \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K : \theta = \theta_1$
2. $H : \theta \le \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K : \theta > \theta_0$
3. $H : \theta \le \theta_1$ หรือ $K : \theta \ge \theta_2$ ขัดแย้งกับ $K : \theta_1 < \theta < \theta_2$
4. $H : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ ขัดแย้งกับ $K : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$
5. $H : \theta = \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K : \theta \ne \theta_0$

2. แบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (The Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานอย่างง่าย $H : \theta = \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K : \theta = \theta_1$ และพิจารณากรณี $\theta_1 < \theta_0$ เราสามารถใช้ Neyman-Pearson Lemma ได้ดังนี้

$$P_{\theta_0}(x) = \binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x} \qquad \text{และ}$$

$$P_{\theta_1}(x) = \binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}$$

ดังนั้น

$$\frac{P_{\theta_1}(x) = \binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}}{P_{\theta_0}(x) = \binom{n}{x}\theta_0^x(1-\theta_0)^{n-x}} = \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^x\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n$$

และจาก

$$\begin{aligned}
\alpha(b) &= P_{\theta_0}\left\{\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)} > b\right\} \\
&= p_{\theta_0}\left\{\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^x\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n > b\right\} \\
&= p_{\theta_0}\left\{x\ln\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right) > \ln(b) - n\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)\right\}
\end{aligned}$$

พิจารณา $\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right) < 1$ กรณี $\theta_1 < \theta_0$ ดังนั้น $\ln\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right) < 0$

ดังนั้น $\alpha(b) = P_{\theta_0}\{X < C\}$ ซึ่ง $C = \left\{\frac{\ln(b) - n\ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}{\ln\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)}\right\}$

ดังนั้นตัวสถิติเพื่อการทดสอบสำหรับการทดสอบขนาด α หรือทดสอบ $H: \theta = \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K: \theta = \theta_1$ กรณี $\theta_1 < \theta_0$ อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x < c, \\ \dfrac{\alpha - \alpha(c)}{\alpha(c-0) - \alpha(c)} & \text{สำหรับ } x = c, \\ 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases}$$

โดยที่ C และ $\gamma = \dfrac{\alpha - \alpha(c)}{\alpha(c-0) - \alpha(c)}$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ เพื่อการทดสอบสมมติฐาน $H: \{\theta = 0.7\}$ ขัดแย้งกับ $K: \{\theta = 0.3\}$ จากตารางความน่าจะเป็น $P_\theta(x)$ ดังนี้

Binomial Probability $b(X,n;\theta)$; n = 20

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.3	0.0008	0.0068	0.0278	0.0716	0.1304	0.1789	0.1916	0.1643	0.1144	0.0654	0.0308
0.7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0120	0.0308
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	รวม
0.3	0.0120	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
0.7	0.0654	0.1144	0.1643	0.1916	0.1789	0.1304	0.0716	0.0278	0.0068	0.0008	1.0000

เราได้จุด C เป็น 11 และ $\gamma = \dfrac{0.05 - P(X < 11)}{P(X = 11)} = \dfrac{0.05 - 0.048}{0.0653} = 0.0306278$

ดังนั้น
$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X < 11 \\ 0.0306278 & \text{สำหรับ } X = 11 \\ 0 & \text{สำหรับ } X > 11 \end{cases}$$

ตารางแสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ) ณ จุดวิกฤต C และค่าของ C สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H : {θ = 0.7 } ขัดแย้งกับ K : {θ = 0.3 } แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	จำนวนการทดลอง (n)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ X=C (γ)	ค่าวิกฤต (C)
0.01	10	0.9333334	3
	20	0.4083334	9
	30	0.3396226	15
	40	0.4352941	21
	50	0.6716417	27
0.05	10	0.0252672	5
	20	0.0306279	11
	30	0.2229729	17
	40	0.5732484	23
	50	0.0621621	30

3. แบบทดสอบที่มีกำลังสูงสุดเสมอ (The Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาตัวทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ หากเราสามารถหาตัวทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ ในขณะที่ตัวทดสอบเรายังไม่เปลี่ยนไป ยังสามารถใช้ตัวทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นตัวทดสอบที่จัดได้ว่าดีมาก กล่าวคือตัวทดสอบที่มีฟอร์มเดียว (Uniform) แต่สามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกได้เป็น 2 กรณีคือ

1) ในกรณีการทดสอบสมมติฐาน H : $\theta \le \theta_0$ ขัดแย้งกับ K : $\theta > \theta_0$

เราพิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ของการแจกแจงแบบทวินาม อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$P_\theta(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad ,x = 0,1,2,3,4,\ldots,n$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x(1-\theta)^n$$

$$= (1-\theta)^n e^{\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)x}\binom{n}{x}$$

ซึ่งเทียบฟอร์ม $= C(\theta)\, e^{Q(\theta)T(x)}\, h(x)$

โดยที่ $c(\theta) = (1-\theta)^n$, $Q(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$,$T(x) = X$ และ $h(x) = \binom{n}{x}$ ดังนั้นจะได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบทวินาม จัดอยู่ในตระกูลของ one-parameter exponential ได้ และพิจารณา $Q(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$ เป็น Strictly monotone increasing ตาม θ ดังนั้นโดยทฤษฎี แล้ว จะมี UMP test $\phi(x)$ สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐาน $H : \theta \le \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K : \theta > \theta_0$ ที่ขนาดการทดสอบ α อยู่ในฟอร์ม

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } T(x) = X > C \\ \gamma & \text{สำหรับ } X = C \\ 0 & \text{สำหรับ } X < C \end{cases}$$

โดยที่ C และ γ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha$

ในกรณีเฉพาะ เมื่อ $n = 20$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ เพื่อการทดสอบสมมติฐาน $H : \{\theta \le 0.3\}$ ขัดแย้งกับ $K : \{\theta > 0.3\}$ จากตารางความน่าจะเป็น $P_\theta(x)$ เมื่อ $\theta = 0.3$ จะได้ว่า $C = 9$ และ $\gamma = \dfrac{0.05 - P(X < 9)}{P(X = 9)} = \dfrac{0.05 - 0.048}{0.0653} = 0.0306278$

ดังนั้นเราได้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบเป็น UMP test อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X > 9 \\ 0.0306278 & \text{สำหรับ } X = 9 \\ 0 & \text{สำหรับ } X < 9 \end{cases}$$

ตารางแสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ) ณ จุดวิกฤต C และค่าของ C สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H : \{\theta \le 0.3\}$ ขัดแย้งกับ $K : \{\theta > 0.3\}$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	จำนวนการทดลอง (n)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ X=C (γ)	ค่าวิกฤต (C)
0.01	10	0.9333334	7
	20	0.4083334	11
	30	0.3396226	15
	40	0.4352941	19
	50	0.6716417	23
0.05	10	0.0252672	5
	20	0.0306279	9
	30	0.2229729	13
	40	0.5732484	17
	50	0.0621621	20

2) ในกรณีการทดสอบสมมติฐาน $H : \theta \le \theta_1$ หรือ $K : \theta \ge \theta_2$ ขัดแย้งกับ $K : \theta_1 < \theta < \theta_2$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ที่มีการแจกแจงแบบทวินามตามข้อ 1) ที่ฟังก์ชันความน่าจะเป็นอยู่ในตระกูลของ one-parameter exponential ซึ่ง $a(\theta)$ เป็น strictly monotone increasing ตาม θ โดยทฤษฎีสำหรับการทดสอบสมมติฐานข้างบน จะมี Uniformly Most Powerful test $\phi(x)$ ขนาดการทดสอบ α อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } C_1 < T(x) = X < C_2 \\ \gamma_i & \text{สำหรับ } X = C_i \ ; \ i = 1,2 \\ 0 & \text{สำหรับ } X < C_1, or, X > C_2 \end{cases}$$

โดยที่ C_i และ γ_i เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E_{\theta_1}\phi(x) = E_{\theta_2}\phi(x) = \alpha$

เราจะได้ว่า
$$\sum_{X=C_1+1}^{C_2-1} P_{\theta_1}(x) + \gamma_1 P_{\theta_1}(c_1) + \gamma_2 P_{\theta_1}(c_2) = \alpha$$
$$\sum_{X=C_1+1}^{C_2-1} P_{\theta_2}(x) + \gamma_1 P_{\theta_2}(c_1) + \gamma_2 P_{\theta_2}(c_2) = \alpha$$

ในกรณีเฉพาะเมื่อ n=20 และ α=0.05 สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐาน $H:\theta \le 0.3$ หรือ $\theta \ge 0.7$ ขัดแย้งกับ $K : 0.3 < \theta < 0.7$ จากตารางความน่าจะเป็นข้างต้น เราได้ $C_1=9$ และ $C_2 = 11$

และ $0.0308 + 0.0654\gamma_1 + 0.0120\gamma_2 = 0.05$

$0.0308 + 0.0120\gamma_1 + 0.0654\gamma_2 = 0.05$

$0.0654\gamma_1 + 0.0120\gamma_2 = 0.0192$

$0.0120\gamma_1 + 0.0654\gamma_2 = 0.0192$

ดังนั้นจะได้ว่า $\gamma_1 = \gamma_2 = \dfrac{(0.0654)(0.0192)-(0.0120)(0.0192)}{0.0654^2 - 0.0120^2} = 0.248062015$

เราได้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบ เป็น UMP test อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } 9 < X < 11 \\ 0.248062015 & \text{สำหรับ } X = 9 \text{ และ } X = 11 \\ 0 & \text{สำหรับ } X < 9 \text{ หรือ } X > 11 \end{cases}$$

ตารางแสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ) ณ จุดวิกฤต C และค่าของ C สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H: \theta \le 0.3$ หรือ $\theta \ge 0.7$ ขัดแย้งกับ $K: 0.3 < \theta < 0.7$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	จำนวนการทดลอง (n)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ X=C (γ)	ค่าวิกฤต (C_1)	ค่าวิกฤต (C_2)
0.01	10	not exist	-	-
	20	not exist	-	-
	30	not exist	-	-
	40	0.613861386	19	21
	50	0.695652173	23	27
0.05	10	not exist	-	-
	20	0.248062015	9	11
	30	0.263616557	13	17
	40	0.579113924	17	23
	50	0.062162162	20	30

4. แบบทดสอบที่ไม่เอนเอียงที่มีกำลังสูงสุดเสมอ
(The Uniformly Most Powerful Unbiased Test)

ในกรณีเมื่อเราพยายามหาตัวสถิติเพื่อการทดสอบที่เป็น UMP test ไม่มีในบางสมมติฐาน เราอาจหาตัวสถิติเพื่อการทดสอบที่มีคุณสมบัติต่ำลง โดยเราคาดจะหา test ในกลุ่มที่เป็น Unbiased เท่านั้น เราเรียกตัวทดสอบที่ได้นั้นว่า UMP Unbiased test เราจะพิจารณาสมมติฐาน 2 ลักษณะที่จะมี UMP Unbiased test คือ

1) **ในกรณีการทดสอบสมมติฐาน** $H: \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ ขัดแย้งกับ $K: \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$

โดยทฤษฎีสำหรับการทดสอบสมมติฐานนี้ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในตระกูลของ one-parameter exponential ซึ่ง $Q(\theta)$ เป็น strictly monotone increasing ตาม θ จะมี UMP unbiased test $\phi(x)$ ขนาดการทดสอบ α อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X < C_1 \text{ หรือ } X > C_2 \\ \gamma_i & \text{สำหรับ } X = C_i \quad ; i = 1,2 \\ 0 & \text{สำหรับ } \quad C_1 < X < C_2 \end{cases}$$

โดยที่ C_i และ γ_i เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้จาก $E_{\theta_1}\phi(x) = E_{\theta_2}\phi(x) = \alpha$

เราได้ว่า
$$\sum_{X=0}^{C_1-1} P_{\theta_1}(x) + \sum_{X=C_2+1}^{n} P_{\theta_1}(x) + \gamma_1 P_{\theta_1}(c_1) + \gamma_2 P_{\theta_1}(c_2) = \alpha$$
$$\sum_{X=0}^{C_1-1} P_{\theta_2}(x) + \sum_{X=C_2+1}^{n} P_{\theta_2}(x) + \gamma_1 P_{\theta_2}(c_1) + \gamma_2 P_{\theta_2}(c_2) = \alpha$$

จากตารางความน่าจะเป็น เมื่อ $n = 20$, $\alpha = 0.05$ โดยที่ $\theta_1 = 0.3$ และ $\theta_2 = 0.7$
เราได้ $C_1 = 3$ และ $C_2 = 11$ และ

$$0.0008+0.0068+0.0278+0.0039+0.0010+0.0002+0.0716\gamma_1+0.0120\gamma_2 = 0.05$$
$$0.0002+0.0020+0.0100+0.0136+0.0045+0.0012+0.0003+0.0323\gamma_1+0.0336\gamma_2 = 0.05$$
$$0.0716\gamma_1 + 0.0120\gamma_2 = 0.0095$$
$$0.0323\gamma_1 + 0.0336\gamma_2 = 0.0182$$

ดังนั้นเราได้ว่า $\gamma_1 = 0.049946485$ และ $\gamma_2 = 0.493652634$

เราได้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบเป็น UMP Unbiased test สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H: 0.3 \le \theta \le 0.7$ ขัดแย้งกับ $K: \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X < 3 \text{ หรือ } X > 11 \\ 0.049946485 & \text{สำหรับ } X = 3 \\ 0.493652634 & \text{สำหรับ } X = 11 \\ 0 & \text{สำหรับ } 3 < X < 11 \end{cases}$$

ตารางแสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ_i) ณ จุดวิกฤต C_i และค่าของ C_i สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H: 0.3 \le \theta \le 0.7$ ขัดแย้งกับ $K: \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	จำนวนการทดลอง (n)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X=C_1(\gamma_1)$	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X=C_2(\gamma_2)$	ค่าวิกฤต (C_1)	ค่าวิกฤต (C_2)
0.01	10	0.280052063	0.066947978	0	7
	20	0.027427155	0.112185914	2	12
	30	0.912868387	0.484898407	3	17
	40	0.014981273	0.108614232	6	21
	50	0.175521183	0.782111634	8	26
0.05	10	0.069095227	0.079689347	1	6
	20	0.049946485	0.493652634	3	11
	30	0.235846863	0.250632599	5	15
	40	0.595304927	0.135046445	7	19
	50	0.093675547	0.087182664	10	23

2) ในกรณีการทดสอบสมมติฐาน $H: \theta = \theta_0$ ขัดแย้งกับ $K: \theta \neq \theta_0$

เราจะได้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบเป็น UMP Unbiased test คล้ายกับในกรณีข้อ 1) โดยอยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X < C_1 \text{ หรือ } X > C_2 \\ \gamma_i & \text{สำหรับ } X = C_i \quad ; i = 1,2 \\ 0 & \text{สำหรับ } C_1 < X < C_2 \end{cases}$$

โดยที่ C_i และ γ_i เป็นค่าคงที่ที่คำนวณได้จาก $E_{\theta_0}\phi(x) = \alpha$ และ $E_{\theta_0}[X.\phi(x)] = E_{\theta_0}[X].\alpha$ หรือเราได้ว่า

$$\sum_{X=0}^{C_1-1}\binom{n}{x}\theta_0^{x}(1-\theta)^{n-x}+\sum_{X=C_2+1}^{n}\binom{n}{x}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x}+\sum_{i=1}^{2}\gamma_i\binom{n}{c_i}\theta_0^{C_i}(1-\theta_0)^{n-C_i} = \alpha$$

และ

$$\sum_{X=0}^{C_1-1}x\binom{n}{x}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x}+\sum_{X=C_2+1}^{n}x\binom{n}{x}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x}+\sum_{i=1}^{2}c_i\gamma_i\binom{n}{c_i}\theta_0^{C_i}(1-\theta_0)^{n-C_i} = n\theta_0\cdot\alpha$$

พิจารณา $x\binom{n}{x}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x} = n\theta_0\binom{n-1}{x-1}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x}$

เราเขียนสมการที่สองเป็น

$$\sum_{X=1}^{C_1-1}\binom{n-1}{x-1}\theta_0^{x-1}(1-\theta_0)^{n-x}+\sum_{X=C_2+1}^{n}\binom{n-1}{x-1}\theta_0^{x}(1-\theta_0)^{n-x}+\sum_{i=1}^{2}\gamma_i\binom{n-1}{c_i-1}\theta_0^{C_i-1}(1-\theta_0)^{n-C_i} = \alpha$$

ในกรณีเฉพาะเมื่อ $n = 20$ $\alpha = 0.05$ เราหาตัวสถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน $H: \theta = 0.3$ ขัดแย้งกับ $K: \theta \neq 0.3$ เราได้ว่า $C_1 = 2$ และ $C_2 = 10$ โดยที่

$$0.0008+0.0068+0.0120+0.0039+0.0010+0.0002+0.0278\gamma_1+0.0308\gamma_2 = 0.05$$

$$0(0.0008)+1(0.0068)+11(0.0120)+12(0.0039)+13(0.0010)+14(0.0002)+$$
$$0.0278)\gamma_1+10(0.0308)\gamma_2 = 0.0986$$

$$0.0278\gamma_1+0.0308\gamma_2 = 0.0253$$

$$0.0556\gamma_1+0.3080\gamma_2 = 0.0986$$

จากทั้งสองสมการ เราได้ว่า

$\gamma_1 = 0.694244604$ และ $\gamma_2 = 0.194805194$

ดังนั้นเราได้ตัวสถิติเพื่อการทดสอบเป็น UMP Unbiased test สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H: \theta = 0.3$ ขัดแย้งกับ $K: \theta \neq 0.3$ อยู่ในรูป

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } X < 2 \text{ หรือ } X > 10 \\ 0.694244604 & \text{สำหรับ } X = 2 \\ 0.194805194 & \text{สำหรับ } X = 10 \\ 0 & \text{สำหรับ } 2 < X < 10 \end{cases}$$

ตารางแสดงความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ_i) ณ จุดวิกฤต C_i และค่าของ C_i สำหรับการทดสอบ $H: \theta = 0.3$ ขัดแย้งกับ $K: \theta \neq 0.3$ แสดงในตารางข้างล่างดังนี้

ขนาดการทดสอบ (α)	จำนวนการทดลอง (n)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X=C_1$ (γ_1)	ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X=C_2$ (γ_2)	ค่าวิกฤต (C_1)	ค่าวิกฤต (C_2)
0.01	10	not exist	-	-	-
	20	0.692513369	0.843822843	1	12
	30	0.463675213	0.562271062	3	16
	40	0.453551912	0.561403508	5	20
	50	0.585784313	0.746323529	7	24
0.05	10	not exist	-	-	-
	20	0.694244604	0.194805194	2	10
	30	0.825961538	0.282251082	4	14
	40	0.078787878	0.518498942	7	18
	50	0.365384615	0.895432692	9	22

References

Lehmann E.L. 1986. **Testing Statistical Hypotheses**., 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.

Kendall M.G, Stuart AS. 1973. **The Advanced Theory of Statistics**. 3rd ed. London: Charles Griffin.

Olkin I, Gleser L.J, Derman C. 1980. **Probability Models and Applications**. New York : Macmillan.

Dudewicz E.J, Mishra SN. 1988. **Modern Mathematical Statistics**. New York: John Wiley & Sons.

ประชุม สุวัตถี. 2527. **ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ** สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ร่วมกับสำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์.