# การศึกษาการสุ่มตัวอย่างควบคุมโดยวิธีสุ่มด้วยความน่าจะเป็นผันแปรแบบไม่ใส่คืน

# A Study of Controlled Sampling with Varying Probability without Replacement

วิมล สอนแจ่ม*
Wimol Sonchaem
ประชุม สุวัตถี**
Prachoom Suwattee, Ph.D.

## บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของการศึกษาครั้งนี้ เพื่อพัฒนาวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบใหม่สำหรับการสุ่มอย่างง่ายด้วยความน่าจะเป็นผันแปร เพื่อให้ได้ตัวอย่างที่ต้องการ และจากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้นต้องการหาตัวประมาณค่าของผลรวมของประชากรซึ่งมีคุณสมบัติไม่เอียงเฉและคงเส้นคงวา และหาความแปรปรวนของตัวประมาณค่าดังกล่าวด้วย นอกจากนี้ยังต้องการแสดงวิธีการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการคัดเลือกลำดับที่สอง (second order inclusion probability) ด้วย

วิธีการสุ่มตัวอย่างที่นำเสนอในการศึกษาครั้งนี้ใช้วิธีปฏิเสธ ดังนั้น จะเลือกตัวอย่างต่อเนื่องไปจนกว่าจะได้ตัวอย่างที่ยอมรับได้ ในแผนการสุ่มตัวอย่างนี้ วัตถุประสงค์ที่กำหนดจะตั้งเป็นทฤษฎีและพิสูจน์เพื่อยืนยันผลที่ได้ นอกจากนี้ยังนำเอาประชากรที่มีอยู่จริงมาทดสอบแผนการสุ่มตัวอย่างนี้ด้วย

ผลของการศึกษาแสดงให้เห็นว่าวิธีการสุ่มตัวอย่างนี้เป็นการสุ่มตัวอย่างโดยให้ความน่าจะเป็นของการคัดเลือกเป็นสัดส่วนกับขนาด นอกจากนี้ยังพบว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวอย่างที่ต้องการมีค่าสูงกว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวอย่างที่ไม่มีแผนการควบคุม ผลการศึกษาพบว่า (1) ตัวประมาณค่าของผลรวมของประชากรเป็นตัวประมาณแบบสัดส่วนซึ่งมีคุณสมบัติไม่เอียงเฉและคงเส้นคงวา (2) ตัวประมาณค่าของความแปรปรวนของค่าประมาณ มีคุณสมบัติไม่เอียงเฉ และ (3) มีสูตรสำหรับหาความน่าจะเป็นของการคัดเลือกลำดับที่สองสำหรับแผนการสุ่มตัวอย่างครั้งนี้

* นักศึกษาหลักสูตรปรัชญาดุษฎีบัณฑิตทางสถิติ คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
** ศาสตราจารย์เกียรติคุณ คณะสถิติประยุกต์ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์

## Abstract

The objectives of this study are to develop a new sampling scheme that works in the principle of the sampling with varying probability and to acquire a desirable sample. Under the sampling scheme, the estimator of the population total and its estimator of the variance were presented. It also extends to the computational expression of the second order inclusion probability, unbiasedness and consistency properties of the proposed estimator.

The proposed sampling scheme is a rejective method. Hence, a sample is continuously selected until it is accepted. In the sampling plan, the theorems were theorized and proved to confirm the objectives of the study. The real population was employed to test the sampling plan.

The results of this study show that the sampling scheme has attained the inclusion probability proportional to size sampling. In addition, it was found that the probabilities to acquire a desirable sample get higher probabilities than the uncontrolled plan. The findings of theorems also indicate that (1) the ratio estimator of the population total is unbiased and consistent, (2) the estimator of the variance of the estimator is unbiased and (3) there are computational expressions of the second order inclusion probability under this plan.

## 1. บทนำ

ในการใช้เทคนิคต่างๆ ของการสุ่มตัวอย่างมีปัญหาพื้นฐานประการหนึ่งคือ การสุ่มได้หน่วยตัวอย่างที่ไม่พึงประสงค์ หรือได้หน่วยตัวอย่างที่ไม่สามารถเข้าไปถึงได้ เช่นหน่วยตัวอย่างที่ไม่มีคุณสมบัติครบตามที่ต้องการ หรือหน่วยตัวอย่างที่อยู่ห่างไกลซึ่งการเดินทางไปเก็บตัวอย่างดังกล่าวอาจทำไม่ได้ เป็นต้น Goodman (1950) แนะนำวิธีในการแก้ปัญหานี้ โดยเสนอวิธีที่ทำให้โอกาสของการได้หน่วยตัวอย่างที่ไม่พึงประสงค์มีค่าน้อย เทคนิคดังกล่าวนี้เรียกว่า การสุ่มตัวอย่างควบคุม (controlled sampling) ต่อมาในปี ค.ศ. 1965, 1968, และ 1973 Avadhani และ Sukhatme ศึกษาเกี่ยวกับ การสุ่มตัวอย่างควบคุม โดยใช้เทคนิค การสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) แต่เนื่องจากตัวประมาณที่ได้จากการสุ่มอย่างง่าย มีค่าความแม่นยำต่ำ

ดังนั้นจึงมีความพยายามที่จะเพิ่มความแม่นยำ โดยใช้การสุ่มแบบควบคุมด้วยความน่าจะเป็นผันแปร (Sampling with Varying Probabilities) กล่าวคือกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่แต่ละหน่วยตัวอย่าง ในประชากรจะถูกสุ่ม มีค่าไม่เท่ากัน ตัวอย่างของการศึกษาดังกล่าวได้แก่การศึกษาของ Avadhani และ Sukhatme (1967) และ J.N.K Rao และ A.K Nigam (1990, 1992) การสุ่มตัวอย่างเหล่านี้ก็มีความยุ่งยาก เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่

บทความนี้จะนำเสนอ การสุ่มตัวอย่างควบคุม เพื่อใช้กับการสุ่มตัวอย่างแบบ Inclusion Probability Proportional to Size (IPPS) ชนิดไม่ใส่คืน พร้อมทั้งหาตัวประมาณค่าของผลรวมของประชากร และตัวประมาณค่าของ ความแปรปรวนของตัวประมาณของ ผลรวมดังกล่าว

## 2. นิยาม และ สัญลักษณ์

**นิยาม 2.1** หน่วยพึงประสงค์ (Preferred unit) หมายถึง หน่วยตัวอย่างที่มีคุณสมบัติครบถ้วนตามต้องการ

หน่วยตัวอย่างที่ไม่มีคุณสมบัติครบถ้วนตามที่ต้องการเรียกว่า หน่วยไม่พึงประสงค์ (Nonpreferred unit)

**นิยาม 2.2** ตัวอย่างพึงประสงค์ (Preferred sample) หมายถึง ตัวอย่างที่ประกอบด้วยจำนวนหน่วยไม่พึงประสงค์น้อยกว่า $c$ หน่วย โดยที่ $c$ เป็นจำนวนเต็มที่ถูกกำหนดไว้ ล่วงหน้าและ $c$ มีค่าน้อยกว่าขนาดตัวอย่าง $(n)$

ในกรณีที่ตัวอย่างมีจำนวนหน่วยตัวอย่างไม่พึงประสงค์มากกว่า $c$ หน่วย จะเรียกตัวอย่างนั้นว่า ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ (Nonpreferred sample)

**นิยาม** 2.3 การสุ่มตัวอย่างควบคุม (Controlled sampling) หมายถึงการสุ่มตัวอย่างที่จะลดโอกาสของการเลือกตัวอย่างไม่พึงประสงค์

**นิยาม** 2.4 แผนการสุ่มที่ยอมรับได้ (Admissible scheme) หมายถึง แผนการสุ่มตัวอย่างควบคุมที่ทำให้ความน่าจะเป็นของการเกิดตัวอย่างไม่พึงประสงค์ มีค่าไม่เกินความน่าจะเป็นของการเกิดตัวอย่างไม่พึงประสงค์ ภายใต้การสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุม (Uncontrolled sampling)

**สัญลักษณ์** 2.1

กำหนดให้ประชากรที่จะศึกษา มีขนาด N ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มของหน่วยพึงประสงค์ซึ่งมีขนาด $N_1$ และ กลุ่มของหน่วยไม่พึงประสงค์ซึ่ง มีขนาด $N_2$ โดยที่ $N_2 < N_1$ และ $N_1 + N_2 = N$

สมมติให้หน่วยพึงประสงค์ ได้แก่หน่วยที่ 1,2,..., $N_1$ และหน่วยไม่พึงประสงค์ ได้แก่หน่วยที่ $N_1+1,\ldots,N$.

**สัญลักษณ์** 2.2

กำหนดให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ เป็นประชากรที่ต้องการศึกษา ซึ่งมีขนาด N และ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ เป็นตัวแปรช่วย (Auxiliary variable) ที่ทราบค่าและสอดคล้อง (Corresponse) กับ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ ตามลำดับ

นอกจากนี้ยังกำหนดให้ $U_i = (Y_i, X_i)$ แทน หน่วยตัวอย่างที่ i โดยมีค่า $Y_i > 0$ และ $X_i > 0$ ทุกค่า i = 1,2,...,N และทั้งคู่มีความสัมพันธ์กันสูงด้วย

**สัญลักษณ์** 2.3

กำหนดให้ $P_i = \dfrac{X_i}{X}, i = 1,2,\ldots,N$ โดยที่ $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

**สัญลักษณ์** 2.4

กำหนดให้ S เป็น เซต ของตัวอย่างขนาด n ทั้งหมดที่เป็นไปได้ ซึ่งสุ่มมาจากประชากร $(Y_1,X_1)$, $(Y_2,X_2), \ldots, (Y_N,X_N)$ ดังนั้น ถ้า $s \in S$ แล้วจะได้ $s = \{(y_1,x_1),(y_2,x_2),\ldots,(y_n,x_n)\}$ เป็นตัวอย่างขนาด n จากประชากรดังกล่าว

**สัญลักษณ์** 2.5

กำหนด ให้

$$Z_i = \begin{cases} \dfrac{(N-1)nX_i - (n-1)X}{(N-n)X} & ; n(N-1)X_i - (n-1)X > 0 \\ 0 & ; n(N-1)X_i - (n-1)X \le 0 \end{cases}$$

โดยที่ $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ และ

กำหนดให้ $Z^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_1} Z_i$, $Z^{(2)} = \sum_{i=N_1+1}^{N} Z_i$ และ $Z = Z^{(1)} + Z^{(2)}$.

และ

$$z'_i = \begin{cases} Z_{(1)} & ,\text{if } i = N_1 + 1,\dots,N \\ Z_i + B.\dfrac{Z_i}{Z^{(1)}} & ,\text{if } i = 1,\dots,N_1 \end{cases}$$

โดยที่ $Z_{(1)} = \text{Min}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$, $B = \left(Z^{(2)} - N_2 Z_{(1)}\right)$ และ $Z' = \sum_{i=1}^{N} Z'_i$ .[1]

## 3. วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบควบคุม

การสุ่มตัวอย่างแบบควบคุม ประกอบด้วยขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สุ่มตัวอย่างขนาด n หน่วย โดยวิธีการสุ่มแบบไม่ใส่คืน จากประชากรขนาด N

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่า $\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s$ จากตัวอย่างที่สุ่มได้ โดยที่ $z'_j$ เป็นค่าสังเกต จากหน่วยใน ประชากร ในการสุ่มครั้งที่ j และ $\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s$ หมายถึง การบวก $z'_j$ ในตัวอย่าง

ขั้นตอนที่ 3 ทำการสุ่ม ตัวเลขสุ่ม (random number) ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึงค่า $M = n.Z'_{(N_1)}$ , โดยที่ $Z'_{(N_1)} = \text{Max}(Z'_1, \dots, Z'_{N_1})$.

ขั้นตอนที่ 4 ถ้า $r \leq \left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s$ แล้ว ตัวอย่าง s ที่สุ่มได้จากขั้นตอนที่ 1 จะได้รับการยอมรับ มิฉะนั้น จะปฏิเสธตัวอย่าง s แล้วเริ่มขบวนการสุ่มตั้งแต่ขั้นตอนที่ 1 ถึง 4 ใหม่

จากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบควบคุมดังกล่าว ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างที่ยอมรับได้ คือ

$$P(s) = \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \left( \frac{\sum_{j=1}^{n} z'_j}{Z'} \right)_s \qquad (3.1)$$

และ ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้ หน่วยที่ i ในตัวอย่างขนาด n เท่ากับ $\pi_i$ สำหรับ $Z_i \geq 0$, $i = 1,2,\dots,N$ สามารถคำนวณได้โดยการบวกค่า P(s) ทุกๆ ตัวอย่าง $s \in S$ ที่มี หน่วยที่ i อยู่ในตัวอย่าง s นั้นด้วย

จาก (3.1) และ lemma 1 (ในภาคผนวก)

---

[1] $\sum_{i=1}^{N} Z'_i = N_2 Z_{(1)} + Z^{(1)} + B = Z^{(1)} + Z^{(2)} = Z.$

$$\pi_i = \sum_{s\ni i} P(s) = \sum_{s\ni i} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{\binom{N-1}{n-1} Z'}$$

$$= \frac{\binom{N-2}{n-2} + \left(\frac{N-n}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} Z'_i/Z'}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{(N-n)\frac{Z'_i}{Z'} + (n-1)}{(N-1)}$$

$$= \frac{(N-n)Z'_i + (n-1)}{(N-1)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(N-n)Z_{(1)} + (n-1)}{(N-1)} & , i = N_1 + 1, \ldots, N \\ \dfrac{(N-n)(Z_i + \frac{BZ_i}{Z^{(1)}}) + (n-1)}{(N-1)} & , i = 1, \ldots, N_1 \end{cases}$$

$$= nP'_i.$$

โดยที่ $P'_i = \begin{cases} P_{(1)} & , i = N_1 + 1, \ldots, N \\ P_i(1 + \frac{B}{Z^{(1)}}) - \frac{n-1}{n(N-1)} \frac{B}{Z^{(1)}} & , i = 1, 2, \ldots, N_1 \end{cases}$.

ดังนั้นวิธีการสุ่มนี้ เป็น ไปตามหลักการของ IPPS sampling **คือ** $\pi_i = nP'_i$ **และความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ หน่วยที่** $i$ **และ** $i'$ **โดยที่** $i \neq i'$ **ในตัวอย่างขนาด** $n$ **คือ** $\pi_{ii'}$ **ซึ่งสามารถคำนวณได้** โดยการบวกค่า P(s) ทุกๆตัวอย่าง $s \in S$ **ที่หน่วยที่** $i$ **และ** $i'$, $i \neq i'$ **อยู่ในตัวอย่าง** $s$ **นั้น ซึ่งจะได้**

$$\pi_{ii'} = \frac{(n-1)}{(N-2)}(\pi_i + \pi_{i'}) - \frac{n(n-1)}{(N-1)(N-2)}$$

จากแผนการสุ่มตัวอย่างควบคุมที่นำเสนอ จะเห็นว่า การลดความน่าจะเป็นของตัวอย่างไม่พึงประสงค์ ขึ้นอยู่กับจำนวนของหน่วยไม่พึงประสงค์ในตัวอย่าง ดังนั้น จากนิยาม (2.2) การพิจารณากำหนดค่า c ที่ต่ำที่สุดอย่างเหมาะสมสำหรับวิธีการสุ่มตัวอย่างควบคุมนี้เพื่อให้โอกาสที่จะเลือกได้ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ ต้องไม่เกินโอกาสที่จะเลือกได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์จากแผนการสุ่มแบบไม่ควบคุม เป็นดังต่อไปนี้

**ทฤษฎี** ถ้า $c \geq n\dfrac{N_2}{N}$ แล้ว วิธีการสุ่มแบบควบคุมนี้เป็นวิธีที่ ยอมรับได้ (Admissible).

**พิสูจน์** ให้ L เป็น เซต ของ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ ทั้งหมด ซึ่งมี จำนวน

$$\sum_{r=c}^{\mathrm{Min}(n,N_2)} \binom{N_1}{n-r}\binom{N_2}{r}$$ ตัวอย่าง

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้ทุกๆ ตัวอย่าง $s \in L$ คือ

$$\sum_{s\in L} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i'\right)_s}{\binom{N-1}{n-1}Z'} = \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}Z'} \sum_{r=c}^{\mathrm{Min}(n,N_2)} \left[\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}\left(\sum_{i=1}^{N_1} Z_i'\right) + \binom{N_1}{n-r}\binom{N_2-1}{r-1}\left(\sum_{i=N_1+1}^{N} Z_i'\right)\right]$$

เนื่องจาก แต่ละหน่วย ในกลุ่มของหน่วยพึงประสงค์เกิดขึ้นได้ $\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}$ ครั้ง และแต่ละหน่วย ในกลุ่มของหน่วยไม่พึงประสงค์เกิดขึ้นได้ $\binom{N_1}{n-r}\binom{N_2-1}{r-1}$ ครั้ง

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดตัวอย่างไม่พึงประสงค์ทั้งหมด ภายใต้ $Z_i'$ คือ

$$\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{\mathrm{Min}(n,N_2)} \left[\frac{\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}}{Z'} . \sum_{i=1}^{N_1}\left(Z_i + \frac{BZ_i}{Z^{(1)}}\right) + \frac{\binom{N_1}{n-r}\binom{N_2-1}{r-1}}{Z'} .N_2Z_{(1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \left[ \frac{\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}}{Z'} . \sum_{i=1}^{N_1} Z_i \right] + \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \left[ \frac{\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}}{Z'} .B \right]$$

$$+ \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \left[ \frac{\binom{N_1}{n-r}\binom{N_2-1}{r-1}}{Z'} .N_2 Z_{(1)} \right] \tag{3.2}$$

และความน่าจะเป็นที่จะเกิดตัวอย่างไม่พึงประสงค์ทั้งหมดภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุมโดยการแทนค่า $Z_i$ คือ

$$\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \left[ \frac{\binom{N_1-1}{n-r-1}\binom{N_2}{r}}{Z} . \sum_{i=1}^{N_1} Z_i \right] + \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \left[ \frac{\binom{N_1}{n-r}\binom{N_2-1}{r-1}}{Z} . \sum_{i=N_1+1}^{N} Z_i \right] \tag{3.3}$$

ความแตกต่าง ของค่าความน่าจะเป็นจาก (3.2) และ (3.3) คือ

$$\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \frac{B}{Z} \left[ \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \binom{N_1}{n-r}\binom{N_2}{r} \frac{(n-r)}{N_1} - \sum_{r=c}^{Min(n,N_2)} \binom{N_1}{n-r}\binom{N_2}{r} \frac{r}{N_2} \right] \tag{3.4}$$

โดยที่ $B = \left(Z^{(2)} - N_2 Z_{(1)}\right) \geq 0$ และ $Z' = Z$.

เมื่อพิจารณาค่า c แต่ละค่า , $c \geq n\frac{N_2}{N}$,

$$\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \frac{B}{Z} \left[ \binom{N_1}{n-c}\binom{N_2}{c} \left( \frac{n}{N_1} - c\frac{1}{N_1} - c.\frac{1}{N_2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \frac{B}{Z} \left[ \binom{N_1}{n-c}\binom{N_2}{c} \left( \frac{n}{N_1} - c\left( \frac{N}{N_1 N_2} \right) \right) \right] \leq 0.$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดตัวอย่างไม่พึงประสงค์ภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างควบคุม มีค่าน้อยกว่าแผนการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุม

## 4. การประมาณค่าพารามิเตอร์

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอตัวประมาณค่าผลรวมของประชากร โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากวิธีการสุ่มแบบควบคุมที่เสนอในหัวข้อที่ 3 สำหรับ lemma ที่ใช้ช่วยในการพิสูจน์จะแสดงไว้ในภาคผนวก

**ทฤษฎี 4.1** ภายใต้วิธีการสุ่มนี้ ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของผลรวมของประชากร $Y=\sum_{i=1}^{N} Y_i$ คือ

$$\hat{Y}_{New} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j'\right)/Z'} \tag{4.1}$$

**พิสูจน์**

$$E(\hat{Y}_{New}) = \sum_{s\in S}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j'\right)/Z'}\right]_s .P(s)$$

$$= \sum_{s\in S}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j'\right)/Z'}\right]_s \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j'\right)_s}{\binom{N-1}{n-1}Z'}, \quad P(s) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j'\right)_s}{\binom{N-1}{n-1}Z'}$$

$$= \sum_{s\in S}\frac{1}{\binom{N-1}{n-1}}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)_s$$

$$= \binom{N-1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{\binom{N-1}{n-1}} \quad ; \sum_{s \in S} \left( \sum_{j=1}^{n} y_j \right)_s = \binom{N-1}{n-1} \sum_{i=1}^{N} Y_i \text{ [2]}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Y_i \,.$$

นอกจากนี้ เมื่อพิจารณา $\hat{Y}_{New}$ จะพบว่าตัวประมาณค่านี้เป็น ตัวประมาณที่คงเส้นคงวาด้วย

สำหรับค่า ความแปรปรวนของตัวประมาณค่า $\hat{Y}_{New}$ คือ $V(\hat{Y}_{New})$ สามารถคำนวณได้โดยการใช้

สูตรการหา ความแปรปรวนทั่วไปดังนี้

$$V(\hat{Y}_{New}) = E(\hat{Y}^2_{New}) - Y^2 \quad , Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 a_{ii} + \sum_{i \neq}^{N} \sum_{i'}^{N} Y_i Y_{i'} a_{ii'}$$

(รายละเอียดแสดงไว้ใน lemma 2 ในภาคผนวก)

โดยที่ $a_{ii} = \left[ \frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{s \ni i} \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^{n} z'_j \right)_s} - 1 \right]$ และ $a_{ii'} = \left[ \frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{s \ni i,i'} \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^{n} z'_j \right)_s} - 1 \right]$

ซึ่งสามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่งดังนี้

$$V(\hat{Y}_{New}) = -\sum_{i<}^{N} \sum_{i'}^{N} a_{ii'} Z'_i Z'_{i'} \left( \frac{Y_i}{Z'_i} - \frac{Y_{i'}}{Z'_{i'}} \right)^2$$

**ทฤษฎี 4.2** ตัวประมาณค่าของ $V(\hat{Y}_{New}) = \sum_{i<}^{N} \sum_{i'}^{N} b_{ii'} Z'_i Z'_{i'} \left( \frac{Y_i}{Z'_i} - \frac{Y_{i'}}{Z'_{i'}} \right)^2$ โดยที่

---

[2] เนื่องจากตัวอย่างสุ่มมาโดยวิธีการสุ่มอย่างง่ายแบบไม่ใส่คืน ดังนั้น หน่วยตัวอย่างแต่ละหน่วยจะปรากฏในตัวอย่างขนาด n ที่แตกต่างกัน $\binom{N-1}{n-1}$ ตัวอย่าง

$$b_{ii'} = -a_{ii'} = 1 - \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{s \ni i,i'} \frac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} \text{ คือ}$$

$$v(\hat{Y}_{New}) = \sum_{j<}^{n} \sum_{j'}^{n} b(s) z'_j z'_{j'} \left( \frac{y_j}{z'_j} - \frac{y_{j'}}{z'_{j'}} \right)^2 \qquad (4.2)$$

และ $b(s) = \dfrac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} \left( \binom{N-1}{n-1} - \dfrac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)} \right)_s$

**พิสูจน์**
$$E(v(\hat{Y}_{New})) = \sum_{s \in S} P(s) . \sum_{j<}^{n} \sum_{j'}^{n} b(s) z'_j z'_{j'} \left( \frac{y_j}{z'_j} - \frac{y_{j'}}{z'_{j'}} \right)^2$$

$$= \sum_{i<}^{N} \sum_{i'}^{N} \left[ \sum_{s \ni i,i'} b(s) P(s) \right] Z'_i Z'_{i'} \left( \frac{Y_i}{Z'_i} - \frac{Y_{i'}}{Z'_{i'}} \right)^2 ;$$

พิจารณา $\sum_{s \ni i,i'} b(s)P(s) = \sum_{s \ni i,i'} \left[ \dfrac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)} \left( \binom{N-1}{n-1} - \dfrac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)} \right) \right]_s \cdot \dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{\binom{N-1}{n-1} Z'}$

$$= \sum_{s \ni i,i'} \left( \binom{N-1}{n-1} \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} - \frac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)} \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \right)_s$$

$$= \binom{N-1}{n-1} \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N-1}{n-1}} - \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{s \ni i,i'} \frac{z'}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}$$

$$= 1 - \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{s \ni i,i'} \frac{Z'}{\left( \sum_{j=1}^{n} z'_j \right)_s} = b_{ii'} = -a_{ii'}..$$

ดังนั้น $$E(v(\hat{Y}_{New})) = \sum_{i<}^{N} \sum_{i'}^{N} b_{ii'} Z'_i Z'_{i'} \left( \frac{Y_i}{Z'_i} - \frac{Y_{i'}}{Z'_{i'}} \right)^2 = V(\hat{Y}_{New})$$

## 5. ตัวอย่าง

ในการศึกษาผลผลิตมวลรวมของเหล็กจากโรงงานทั้งหมด 112 โรงงาน[3] ในเขตภาคกลางของประเทศไทยโดยอาศัยข้อมูลจากกรมเศรษฐกิจการพาณิชย์ ซึ่งในการศึกษานี้ได้แบ่งโรงงานออกเป็น 2 กลุ่ม ตามจังหวัดที่ตั้งของโรงงาน ดังนี้คือ โรงงานที่เป็นหน่วยตัวอย่างไม่พึงประสงค์ ได้แก่โรงงานที่ตั้งอยู่ในจังหวัด กาญจนบุรี ชลบุรี ระยอง ฉะเชิงเทรา และสระบุรี มีจำนวนทั้งสิ้น $N_2 = 6$ โรงงาน ประกอบด้วยโรงงานที่ 39, 51, 52, 70, 84 และ 112 (ดูตารางที่ 1 ใน ภาคผนวก) กับโรงงานที่เป็นหน่วยตัวอย่างพึงประสงค์ ได้แก่โรงงานที่ตั้งอยู่ในจังหวัดอื่นๆ ที่เหลือ มีจำนวน ทั้งสิ้น $N_1=106$ โรงงาน ขนาดของตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา คือ n = 20 โรงงานซึ่งสุ่มมาจากประชากรดังกล่าว และในที่นี้ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์จะประกอบด้วยหน่วยตัวอย่างไม่พึงประสงค์ อย่างน้อย $n\frac{N_2}{N} = 2$ โรงงาน

ทำการสุ่มตัวอย่างขนาด n = 20 โดยวิธีการสุ่มแบบไม่ใส่คืนจากประชากรขนาด N =112 ตามวิธีการสุ่มตัวอย่างที่ได้นำเสนอไว้จำนวน 50 ตัวอย่าง[4] พบว่า จากจำนวนตัวอย่างทั้งหมด 50 ตัวอย่าง มีตัวอย่างไม่พึงประสงค์จำนวน 16 ตัวอย่าง ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์แต่ละตัวอย่าง คำนวณจากสมการที่ 3.1 และได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.1

[3] ข้อมูลเงินลงทุน ($X_i$) ของโรงงานทั้งหมดได้แสดงไว้ในตารางที่1 ในภาคผนวก

[4] อาศัย ทฤษฎี Central Limit Theorem

**ตารางที่ 5.1** ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างควบคุม, $P^*(s)$ และ ภายใต้แผนการสุ่มแบบไม่ควบคุม, $P(s)$

| ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ (s) | P(s) | $P^*(s)$ |
|---|---|---|
| $\{U_{106}, U_{112}, U_{12}, U_{22}, U_{45}, U_{84}, U_{3}, U_{53}, U_{104}, U_{35}, U_{110}, U_{81}, U_{11}, U_{44}, U_{76}, U_{62}, U_{8}, U_{28}, U_{38}, U_{21}\}$ | 0.045 | 0.066 |
| $\{U_{59}, U_{42}, U_{52}, U_{11}, U_{103}, U_{105}, U_{87}, U_{83}, U_{14}, U_{54}, U_{88}, U_{15}, U_{70}, U_{68}, U_{65}, U_{100}, U_{27}, U_{17}, U_{61}, U_{92}\}$ | 0.033 | 0.014 |
| $\{U_{46}, U_{89}, U_{48}, U_{50}, U_{81}, U_{77}, U_{58}, U_{47}, U_{31}, U_{53}, U_{110}, U_{51}, U_{59}, U_{6}, U_{92}, U_{112}, U_{41}, U_{30}, U_{33}, U_{42}\}$ | 0.027 | 0.034 |
| $\{U_{79}, U_{12}, U_{68}, U_{27}, U_{80}, U_{84}, U_{35}, U_{72}, U_{63}, U_{87}, U_{69}, U_{95}, U_{57}, U_{40}, U_{112}, U_{22}, U_{75}, U_{102}, U_{38}, U_{91}\}$ | 0.016 | 0.013 |
| $\{U_{58}, U_{75}, U_{20}, U_{103}, U_{106}, U_{80}, U_{21}, U_{51}, U_{105}, U_{59}, U_{79}, U_{17}, U_{112}, U_{18}, U_{42}, U_{71}, U_{23}, U_{29}, U_{92}, U_{91}\}$ | 0.017 | 0.015 |
| $\{U_{94}, U_{25}, U_{110}, U_{26}, U_{65}, U_{100}, U_{81}, U_{10}, U_{112}, U_{2}, U_{38}, U_{52}, U_{55}, U_{105}, U_{78}, U_{88}, U_{76}, U_{68}, U_{98}, U_{13}\}$ | 0.055 | 0.038 |
| $\{U_{20}, U_{52}, U_{26}, U_{28}, U_{67}, U_{64}, U_{15}, U_{27}, U_{90}, U_{74}, U_{1}, U_{59}, U_{50}, U_{71}, U_{39}, U_{79}, U_{77}, U_{49}, U_{34}, U_{54}\}$ | 0.036 | 0.001 |
| $\{U_{29}, U_{31}, U_{34}, U_{77}, U_{36}, U_{24}, U_{48}, U_{49}, U_{109}, U_{89}, U_{79}, U_{71}, U_{54}, U_{101}, U_{25}, U_{67}, U_{112}, U_{12}, U_{52}, U_{103}\}$ | 0.035 | 0.002 |
| $\{U_{108}, U_{59}, U_{66}, U_{17}, U_{94}, U_{21}, U_{5}, U_{112}, U_{19}, U_{54}, U_{25}, U_{63}, U_{51}, U_{90}, U_{106}, U_{43}, U_{39}, U_{103}, U_{56}, U_{71}\}$ | 0.020 | 0.002 |
| $\{U_{24}, U_{60}, U_{69}, U_{11}, U_{17}, U_{92}, U_{23}, U_{96}, U_{13}, U_{84}, U_{71}, U_{72}, U_{108}, U_{51}, U_{78}, U_{95}, U_{30}, U_{55}, U_{61}, U_{85}\}$ | 0.002 | 0.003 |
| $\{U_{79}, U_{7}, U_{111}, U_{65}, U_{77}, U_{59}, U_{109}, U_{105}, U_{83}, U_{102}, U_{112}, U_{53}, U_{3}, U_{9}, U_{15}, U_{26}, U_{52}, U_{93}, U_{107}, U_{99}\}$ | 0.037 | 0.006 |
| $\{U_{99}, U_{53}, U_{61}, U_{38}, U_{19}, U_{96}, U_{79}, U_{28}, U_{90}, U_{10}, U_{60}, U_{59}, U_{71}, U_{52}, U_{92}, U_{67}, U_{44}, U_{16}, U_{39}, U_{74}\}$ | 0.042 | 0.011 |
| $\{U_{55}, U_{102}, U_{111}, U_{86}, U_{73}, U_{46}, U_{16}, U_{70}, U_{78}, U_{88}, U_{60}, U_{30}, U_{72}, U_{65}, U_{13}, U_{29}, U_{5}, U_{10}, U_{51}, U_{62}\}$ | 0.013 | 0.023 |
| $\{U_{18}, U_{107}, U_{25}, U_{111}, U_{31}, U_{23}, U_{40}, U_{52}, U_{24}, U_{112},$ | | |

ตารางที่ 5.1 (ต่อ)

| ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ (s) | P(s) | $P^*(s)$ |
|---|---|---|
| $U_{55}, U_{66}, U_{37}, U_{45}, U_{82}, U_{5}, U_{77}, U_{38}, U_{19}, U_{53}\}$ | 0.045 | 0.021 |
| $\{U_{60}, U_{63}, U_{31}, U_{83}, U_{45}, U_{84}, U_{73}, U_{10}, U_{47}, U_{48},$ | | |
| $U_{82}, U_{99}, U_{74}, U_{7}, U_{38}, U_{15}, U_{96}, U_{54}, U_{106}, U_{112}\}$ | 0.019 | 0.018 |
| $\{U_{53}, U_{82}, U_{102}, U_{96}, U_{108}, U_{38}, U_{112}, U_{52}, U_{44}, U_{40},$ | | |
| $U_{57}, U_{75}, U_{24}, U_{39}, U_{80}, U_{31}, U_{106}, U_{36}, U_{55}, U_{22}\}$ | 0.053 | 0.018 |

P(s) : ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุม
$P^*(s)$: ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างควบคุม

จากตารางที่ 5.1 ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ (s) ภายใต้แผนการสุ่มแบบควบคุม แทนโดยใช้สัญลักษณ์ P*(s) โดยอาศัยสมการที่ 3.1 ดังนี้

$$P^*(s) = \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \left( \frac{\sum_{j=1}^{n} z'_j}{Z'} \right)_s$$

และ P(s) แทนความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ (s) ภายใต้แผนการสุ่มแบบไม่ควบคุม โดยแทนค่า $z'_j$ ด้วยค่า $z_j$ ซึ่งจะได้

$$P(s) = \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \left( \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j}{Z} \right)_s$$

โดยที่ $z_j$ และ $z'_j$ เป็นค่าของ $Z_i$ และ $Z'_i$ ในตัวอย่าง ตามลำดับ[5] ที่สุ่มได้ในครั้งที่ j และ ค่าของผลรวมของ $Z'_i$ หรือ $Z'$ มีค่าเท่ากับ 15.450 และ Z= $Z'$

[5] ข้อมูล $Z_i$ และ $Z'_i$ ของหน่วยตัวอย่างในประชากร แสดงไว้ในตารางที่ 2 ในภาคผนวก

ตัวอย่างเช่น $\{U_{59}, U_{42}, U_{52}, U_{11}, U_{103}, U_{105}, U_{87}, U_{83}, U_{14}, U_{54}, U_{88}, U_{15}, U_{70}, U_{68}, U_{65}, U_{100}, U_{27}, U_{17}, U_{61}, U_{92}\}$ เป็นตัวอย่างไม่พึงประสงค์ที่ประกอบด้วยหน่วยตัวอย่างไม่พึงประสงค์ คือ หน่วยโรงงานที่ 52 แทนด้วย $U_{52}$ และ หน่วยโรงงานที่ 70 แทนด้วย $U_{70}$ โดยที่ค่าของ

$$P^*(s) = \frac{1}{\binom{111}{19}}\left(\frac{0 + 1.9247 + 0 + \ldots + 0}{15.450}\right) = 0.014$$

และ

$$P(s) = \frac{1}{\binom{111}{19}}\left(\frac{0 + 1.0919 + 3.8515 + \ldots + 0}{15.450}\right) = 0.033$$

ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ทั้งหมดภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบควบคุม มีค่าเท่ากับ 0.066+0.014+…+0.018 = 0.285 และ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ทั้งหมดภายใต้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุม มีค่าเท่ากับ 0.045+0.033+…+0.053 = 0.495 ดังนั้นแผนการสุ่มตัวอย่างแบบควบคุมสามารถลดโอกาสที่จะสุ่มได้ตัวอย่างไม่พึงประสงค์ เมื่อเปรียบเทียบกับแผนการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ควบคุม

## ภาคผนวก

**Lemma 1** สำหรับแต่ละหน่วยที่ $i = 1,2,...,N_1,N_1+1,..,N;$

$$\sum_{s\ni i}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{Z'} = \binom{N-2}{n-2} + \left(\frac{N-n}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2}\frac{Z'_i}{Z'}$$

โดยที่ $\sum_{s\ni i}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{Z'}$ หมายถึงการบวกทุกๆ ตัวอย่าง $s \in S$ ที่หน่วยที่ i อยู่ในตัวอย่าง s นั้นด้วย

**พิสูจน์** กำหนดให้ $\sum_{s\not\ni i}\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s / Z'$ เป็นการบวกทุกๆ ตัวอย่าง $s \in S$ ที่หน่วยที่ i ไม่อยู่ใน ตัวอย่าง s นั้น

ดังนั้น

$$\sum_{s\ni i}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{Z'} = \sum_{s\in S}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{Z'} - \sum_{s\not\ni i}\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{Z'}$$

$$= \left[Z'_1\binom{N-1}{n-1} + Z'_2\binom{N-1}{n-1} + ... + Z'_N\binom{N-1}{n-1}\right]\frac{1}{Z'} - \left[Z'_1\binom{N-2}{n-1} + Z'_2\binom{N-2}{n-1}\right.$$

$$\left. +..Z'_{i-1}\binom{N-2}{n-1} + Z'_{i+1}\binom{N-2}{n-1} + ... + Z'_N\binom{N-2}{n-1}\right]\frac{1}{Z'}$$

$$= \frac{1}{Z'}\binom{N-1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{N} Z'_i\right) - \frac{1}{Z'}\binom{N-2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{N} Z'_i - Z'_i\right)$$

$$= \binom{N-1}{n-1} - \binom{N-2}{n-1}(1 - \frac{Z'_i}{Z'})$$

$$= \left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} - \binom{N-2}{n-1} + \binom{N-2}{n-1}\frac{Z'_i}{Z'}$$

$$= \left(\frac{N-1}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} - \left(\frac{N-n}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2} + \left(\frac{N-n}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2}\frac{Z'_i}{Z'}$$

$$= \binom{N-2}{n-2} + \left(\frac{N-n}{n-1}\right)\binom{N-2}{n-2}\frac{Z'_i}{Z'}.$$

**Lemma 2** สำหรับวิธีการสุ่มตัวอย่างที่นำเสนอ ความแปรปรวนของตัวประมาณค่า $\hat{Y}_{New}$ คือ

$$V(\hat{Y}_{New}) = \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 a_{ii} + \sum_{i\neq}^{N}\sum_{i'}^{N} Y_i Y_{i'} a_{ii'}$$

**โดยที่**

$$a_{ii} = \left[\frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} - 1\right] \text{ และ } a_{ii'} = \left[\frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i,i'}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} - 1\right]$$

**พิสูจน์**

$$V(\hat{Y}_{New}) = E(\hat{Y}^2_{New}) - Y^2$$

$$= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)/Z'}\right)^2 - Y^2 \qquad = \sum_{s\in S}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{j\neq}^{n}\sum_{j'}^{n} y_j y_{j'}}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)^2}\right]_s Z'.P(s) - Y^2$$

$$= \sum_{s\in S}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{j\neq}^{n}\sum_{j'}^{n} y_j y_{j'}}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)^2}\right]_s Z'.\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}{\binom{N-1}{n-1}Z'} - Y^2$$

$$= \frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 + \frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i,i'}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s}\sum_{i\neq}^{N}\sum_{i'}^{N} Y_i Y_{i'} - Y^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2\left[\frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} - 1\right] + \sum_{i\neq}^{N}\sum_{j}^{N} Y_i Y_j\left[\frac{Z'}{\binom{N-1}{n-1}}\sum_{s\ni i,i'}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} z'_j\right)_s} - 1\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Y_i^2 a_{ii} + \sum_{i\neq}^{N}\sum_{i'}^{N} Y_i Y_{i'} a_{ii'} .^{[6]}$$

---

[6] $Y^2 = \sum_{i=1}^{N} Y^2 + \sum_{i\neq}^{N}\sum_{i'}^{N} Y_i Y_{i'}$

ตารางที่ 1 ข้อมูลเงินลงทุน ($X_i$) ของโรงงานทั้งหมด 112 โรงงาน

| โรงงานลำดับที่ | X (บาท) | โรงงานลำดับที่ | X (บาท) | โรงงานลำดับที่ | X (บาท) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4000000 | 41 | 1500000 | 81 | 34000000 |
| 2 | 6550000 | 42 | 28800000 | 82 | 16300000 |
| 3 | 2510000 | 43 | 1900000 | 83 | 19000000 |
| 4 | 2100000 | 44 | 60000000 | 84 | 510000 |
| 5 | 2250000 | 45 | 15492244 | 85 | 7400000 |
| 6 | 1000000 | 46 | 75000000 | 86 | 31000000 |
| 7 | 3600000 | 47 | 82000000 | 87 | 14600000 |
| 8 | 3400000 | 48 | 4000000 | 88 | 65000000 |
| 9 | 1800000 | 49 | 6000000 | 89 | 30000000 |
| 10 | 2700000 | 50 | 3500000 | 90 | 2199770 |
| 11 | 7500000 | 51 | 400000 | 91 | 4050000 |
| 12 | 60000000 | 52 | 90006000 | 92 | 10500000 |
| 13 | 4950000 | 53 | 3750000 | 93 | 80000000 |
| 14 | 1166000 | 54 | 3000000 | 94 | 6500000 |
| 15 | 4000000 | 55 | 6700000 | 95 | 4300000 |
| 16 | 2390000 | 56 | 16300000 | 96 | 8424000 |
| 17 | 2525000 | 57 | 6000000 | 97 | 20024000 |
| 18 | 10500000 | 58 | 17000000 | 98 | 8650000 |
| 19 | 500000 | 59 | 2660000 | 99 | 22015000 |
| 20 | 430000 | 60 | 62000000 | 100 | 50000000 |
| 21 | 10850000 | 61 | 5700000 | 101 | 24000000 |
| 22 | 70000 | 62 | 39984400 | 102 | 30000000 |
| 23 | 6500000 | 63 | 300000 | 103 | 10500000 |
| 24 | 4000000 | 64 | 4800000 | 104 | 20000000 |
| 25 | 1000000 | 65 | 220000 | 105 | 3700000 |
| 26 | 4000000 | 66 | 86000000 | 106 | 1000000 |
| 27 | 51700000 | 67 | 4000000 | 107 | 98000000 |
| 28 | 40000000 | 68 | 40000000 | 108 | 7450000 |
| 29 | 13600000 | 69 | 5000000 | 109 | 30000000 |
| 30 | 84062087 | 70 | 53000 | 110 | 20700000 |
| 31 | 3250000 | 71 | 7500000 | 111 | 20000000 |
| 32 | 14000000 | 72 | 2500000 | 112 | 34000000 |
| 33 | 6000000 | 73 | 900000 | | |
| 34 | 19500000 | 74 | 8000000 | | |
| 35 | 301000 | 75 | 75200000 | | |
| 36 | 1200000 | 76 | 11650000 | | |
| 37 | 1200000 | 77 | 3400000 | | |
| 38 | 21450000 | 78 | 8000000 | | |
| 39 | 38000000 | 79 | 73900000 | | |
| 40 | 38000000 | 80 | 13000000 | | |

ตารางที่ 2 ข้อมูล $Z_i$ และ $Z_i'$ ของโรงงานแต่ละโรงงานในประชากรศึกษา จำนวน 112 โรงงาน

| โรงงานลำดับที่ | $Z_i$ | $Z_i'$ | โรงงานลำดับที่ | $Z_i$ | $Z_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 31 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 32 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 33 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 34 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 35 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 37 | 0.091051 | 0.160486 |
| 8 | 0 | 0 | 38 | 0.760588 | 1.340062 |
| 9 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 40 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 41 | 0 | 0 |
| 12 | 0.063999 | 0.112804 | 42 | 1.091976 | 1.924722 |
| 13 | 0 | 0 | 43 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 44 | 0.063999 | 0.112804 |
| 15 | 0 | 0 | 45 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 46 | 0.131629 | 0.232009 |
| 17 | 0 | 0 | 47 | 0.163189 | 0.287638 |
| 18 | 0 | 0 | 48 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 49 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 51 | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 52 | 3.851553 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 53 | 0 | 0 |
| 24 | 0 | 0 | 54 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 55 | 0 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 56 | 0 | 0 |
| 27 | 0.026577 | 0.046844 | 57 | 0 | 0 |
| 28 | 0 | 0 | 58 | 0 | 0 |
| 29 | 0 | 0 | 59 | 0 | 0 |
| 30 | 0.172487 | 0.304026 | 60 | 0.073016 | 0.128698 |
| 61 | 0 | 0 | 91 | 0 | 0 |
| 62 | 1.596243 | 2.813548 | 92 | 0 | 0 |
| 63 | 0 | 0 | 93 | 0.154172 | 0.271744 |
| 64 | 0 | 0 | 94 | 0 | 0 |
| 65 | 0 | 0 | 95 | 0 | 0 |
| 66 | 0.181224 | 0.319426 | 96 | 0 | 0 |
| 67 | 0 | 0 | 97 | 0 | 0 |
| 68 | 0 | 0 | 98 | 0 | 0 |
| 69 | 0 | 0 | 99 | 0 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 100 | 0.018912 | 0.033334 |
| 71 | 0 | 0 | 101 | 0 | 0 |

ตารางที่ 2 (ต่อ)

| โรงงานลำดับที่ | $Z_i$ | $Z_i'$ | โรงงานลำดับที่ | $Z_i$ | $Z_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 0 | 0 | 102 | 0 | 0 |
| 73 | 0 | 0 | 103 | 0 | 0 |
| 74 | 0 | 0 | 104 | 0.695212 | 1.225386 |
| 75 | 0.132530 | 0.233599 | 105 | 0 | 0 |
| 76 | 0.318738 | 0.561810 | 106 | 0 | 0 |
| 77 | 0 | 0 | 107 | 0.235328 | 0.414791 |
| 78 | 0 | 0 | 108 | 0 | 0 |
| 79 | 0.126669 | 0.223268 | 109 | 0 | 0 |
| 80 | 0 | 0 | 110 | 0.726773 | 1.281015 |
| 81 | 1.326426 | 2.337967 | 111 | 0 | 0 |
| 82 | 0.528392 | 0.931346 | 112 | 1.326426 | 0 |
| 83 | 0 | 0 | | | |
| 84 | 0 | 0 | | | |
| 85 | 0 | 0 | | | |
| 86 | 0 | 0 | | | |
| 87 | 0 | 0 | | | |
| 88 | 0.086542 | 0.152539 | | | |
| 89 | 0 | 0 | | | |
| 90 | 0 | 0 | | | |

## บรรณานุกรม

Avadhdni, M.S.,and Sukhatme, B.V.1965."Controlled simple random sampling," Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics 17:34-42.

Avadhdni, M.S.,and Sukhatme, B.V.1967."Controlled sampling with varying probabilities with and without replacement," The Australian Journal Statistics 9:8-15.

Avadhdni, M.S.,and Sukhatme, B.V.1968." Simplified procedures for designing controlled simple random sampling," The Australian Journal Statistics 10:1-7.

Avadhdni, M.S.,and Sukhatme, B.V.1973."Controlled sampling with equal probabilities and without replacement," International Statistical Review 41:175-182.

Cochran W.G.1977. Sampling Techniques. 3rd edition. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Goodman, R., and Kish, L.1950."Controlled selection-a technique in probability sampling," Journal of the American Statistical Association 45:350-372.

Rao, J.N.K., and Vijayan,K.1977."On Estimating the Variance in Sampling with Probability proportional to Aggregate Size," Journal of the American Statistical Association 72: 579-584.